

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**LES ASPECTS MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES DE
L'ANALYSE DES TOLÉRANCES**

JOSÉE MORIN

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)**

JANVIER 2001



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-60907-3

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

**LES ASPECTS MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES DE
L'ANALYSE DES TOLÉRANCES**

présenté par : MORIN Josée

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. BOURDEAU Marc, Ph.D., président

M. CLÉMENT Bernard, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CLOUTIER Guy, Doctorat, membre

**Je dédie ce mémoire à
mon père, ma mère,
mon parrain et ma marraine.**

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de recherche, le professeur Bernard Clément pour m'avoir soutenue tout au cours de cette aventure et pour m'avoir proposé un sujet aussi intéressant. Vos conseils et votre patience ont été des atouts précieux.

Un merci spécial à Nathalie Gélinas et à toute l'équipe de Novaxa Conseil. Mon passage dans votre équipe a été des plus intéressant et m'a permis de pouvoir mettre en pratique la statistique en milieu industriel.

Je tiens à remercier ma famille et mes ami(e)s. C'est grâce à vos encouragements et vos pensées positives que j'ai pu atteindre les objectifs que je m'étais fixés.

Je remercie les professeurs Marc Bourdeau et Guy Cloutier d'avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.

RÉSUMÉ

La demande toujours grandissante pour des produits et des services de haute qualité stimule de nouvelles approches pour l'étude et l'optimisation des processus de conception et de fabrication. La mondialisation des marchés et la vive concurrence poussent les entreprises à se tourner continuellement vers de nouvelles méthodologies et technologies. À ce titre, la problématique de la définition, de la conception et l'optimisation des tolérances sont importantes. Ce mémoire porte sur les aspects mathématiques et statistiques des tolérances.

L'étude et le choix des tolérances sont fondamentalement liés au contrôle de la qualité des produits. Les coûts de fabrication sont intimement liés aux tolérances. Les tolérances sont d'abord un langage de communication entre la fonction de conception et celle de fabrication. Pour cette raison, l'assignation des tolérances est souvent faite par convention et aucune méthode rigoureuse n'est appliquée. Nous avons pensé qu'il était intéressant de faire une synthèse des méthodes d'analyse proposées dans la littérature. La méthode du pire cas, la méthode statistique et la méthode des simulations forment le noyau essentiel des méthodes. Nous exposons l'approche en trois phases de Taguchi pour situer la problématique des tolérances. La méthodologie de conception et d'analyse des tolérances rigoureuse permet aux concepteurs de pouvoir identifier les composants critiques qui peuvent affecter la qualité d'un assemblage.

Taguchi structure une démarche moderne et complète permettant de bien clarifier la place des tolérances dans les processus de conception et de fabrication. Divisée en trois étapes, cette démarche repose sur la notion fondamentale de conception robuste pour contrer et neutraliser la variabilité des facteurs de bruit.

L'analyse des tolérances par la méthode du pire cas est une méthode qui est associée principalement à la variabilité dimensionnelle de l'assemblage d'un produit. Cette

méthode repose sur des situations extrêmes, où les dimensions sont à leurs valeurs minimales ou maximales. La méthode d'analyse statistique est une méthode d'application beaucoup plus générale et réaliste. Elle repose sur des notions de distribution pour représenter la variabilité. Cette méthode permet d'identifier les composants, d'un produit ou d'un procédé, qui contribuent le plus à la variation totale de la caractéristique qualité d'un produit.

L'application de la méthode statistique nous oblige à faire des hypothèses sur le type de distribution statistique que suivent les composants. Le plus souvent on fait l'hypothèse de la normalité pour les composants. Bien que la méthode d'analyse statistique soit plus réaliste, celle-ci demande beaucoup de calculs et il n'est pas toujours facile de vérifier les hypothèses qui s'y rattachent. L'utilisation de simulations vient simplifier et faciliter l'analyse des tolérances. Elle permet d'avoir une bonne idée de l'impact que peut avoir la distribution des composants sur la distribution de la variable mesurée.

Des exemples d'application des trois méthodes d'analyses sont présentés dans ce mémoire. Le premier exemple présente le cas où la relation mathématique entre les composants et la variable mesurée est linéaire. Le deuxième exemple présente le cas où la relation est non linéaire. Dans les deux cas, il s'agit d'assemblage de composants. Pour les deux exemples, l'application de la méthode du pire cas fait en sorte que les tolérances des composants doivent être modifiées pour réussir l'assemblage. Mais, lorsque la méthode statistique est employée les conclusions sur les actions à prendre sont différentes. Les résultats de la méthode statistique indiquent qu'aucune modification n'est nécessaire pour que l'assemblage réponde aux critères dans les deux exemples. Cela met en évidence la caractéristique fondamentale de la méthode du pire cas, c'est-à-dire l'aspect ultra conservateur en fixant l'attention sur des événements ayant de faibles probabilités de se produire. Par contre, la méthode statistique est plus réaliste, mais on doit tolérer un faible niveau de risque.

Dans un dernier chapitre, nous avons exposé les développements théoriques récents concernant la problématique des tolérances.

ABSTRACT

The everlasting consumer's expectation for products and services of high quality is a strong stimulus for new approaches for the study and the optimization of the processes of design and manufacture. The universalization of the markets and the competition push continuously the companies to turn towards new methodologies and technologies. For this reason, the problems of definition, design and optimization of tolerances are significant. This master thesis is concerned with the mathematical and statistical aspects of the tolerancing problems.

The study and the choice of tolerances are related to the quality control of the manufactured products. The manufacturing costs are intimately related to the tolerances. Initially, tolerances are a language of communication between the function of design and manufacture. The assignment of the tolerances is often performed by intuition and not with a rigorous method. We thought that it was interesting to make a synthesis of the tolerancing analysis as found in the literature. The method of the worst case, the statistical method and the method of simulations are at the core of those methods. We present the Taguchi approach of quality engineering in order to place tolerancing problem in a broad context of design and manufacturing. A rigorous methodology of design and analysis of the tolerances allows the designers to identify the critical components, which can affect the quality of an assembly.

Taguchi structures a modern and complete procedure to well clarify the place of the tolerances in the processes of design and manufacture. Divide into three stages, this procedure rests on the concept of robust design to counter and neutralise the variability of uncontrollable noise factors.

The analysis of the tolerances by the method of the worst case is a method, which is mainly associated to the dimensional variability of the assembly of a product. This method rests on extreme situations, where dimensions are set at their minimal or maximum values. The method of statistical analysis is a method, which is much more general and realistic. It rests on concepts of distribution to represent variability. This method allows identifying and ranks the components, of a product or a process, which contribute more to the total variation of the quality characteristic of a product.

The statistical method obliges us to make assumptions on the type of statistical distribution, which follow the components. Generally, we make the assumption of normality for the components. Although the method of statistical analysis is more realistic, it requires more calculations and it is not always easy to check the assumptions, which are attached to it. The use of simulations simplifies and facilitates the analysis of the tolerancing process. It allows also a sensitive analysis of the distribution of the components on the distribution of the measured variable.

Examples of application of the three methods of analyses are presented in this thesis. The first example presents the case where the mathematical relation between the components and the measured variable is linear. The second example presents the case where the relation is non-linear. In both cases, it is assembly of components. In the two examples, the application of the method of the worst case result gives us that the tolerances of the components must be modified to obtain a successful assembly. However, when the statistical method is employed, the conclusions on the actions to take are different. The results of the statistical method indicate that no modification is necessary and the assembly responds to the criteria for the examples. That highlights of the method of the worst case is fixing the attention on events having weak probabilities of occurring. On the other hand, the statistical method is more realistic, but one must tolerate a low level of risk.

In a last chapter, we exposed the recent theoretical developments concerning the problems of the tolerances. We conclude our thesis by presenting a summary of the different methods that we surveyed.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
RÉSUMÉ.....	vi
ABSTRACT.....	ix
TABLE DES MATIÈRES.....	xii
LISTE DES TABLEAUX.....	xvi
LISTE DES FIGURES.....	xvii
LISTE DES ANNEXES.....	xix
INTRODUCTION.....	1
 CHAPITRE 1 : LES TOLÉRANCES.....	 3
1.1 Quelques éléments historiques sur les tolérances.....	3
1.2 Définitions.....	6
1.3 La problématique.....	8
1.4 Littérature sur le concept de tolérances.....	9
1.5 Conclusion.....	11
 CHAPITRE 2 : LES TOLÉRANCES ET LA CONCEPTION	
DE PRODUITS.....	12
2.1 La conception et le développement de produit.....	12
2.1.1 Les étapes.....	12
2.1.2 Le design du concept.....	15
2.2 Le design des paramètres.....	17
2.2.1 La conception robuste de Taguchi.....	17
2.2.2 Le système.....	17
2.2.3 La stratégie de Taguchi.....	19

2.2.4 Remarques concernant la stratégie de Taguchi.....	22
2.2.5 La fonction de perte.....	25
2.2.6 Le rapport signal-bruit SB.....	31
2.2.7 L'analyse et l'évaluation des designs sélectionnés.....	35
2.3 Design des tolérances.....	39
2.3.1 Niveaux des facteurs et du tableau orthogonal.....	40
2.3.2 Analyse de la variance et de la fonction de perte.....	41
2.3.3 Modification des tolérances.....	43
2.4 Conclusion.....	44

CHAPITRE 3 : ANALYSE DES TOLÉRANCES AVEC

LA MÉTHODE DU PIRE CAS.....	45
3.1 Le problème.....	45
3.2 Calcul des tolérances dans un cas d'empilage.....	47
3.2.1 Généralité.....	47
3.2.2 Résultats et interventions possibles.....	50
3.3 Généralisation des résultats : Cas linéaire général.....	51
3.4 Calcul des tolérances dans un cas non linéaire.....	54
3.4.1 Généralité.....	54
3.4.2 Révision des valeurs nominales initiales.....	57
3.4.3 Révision des tolérances initiales.....	59
3.5 Exemples d'application.....	61
3.5.1 Étude d'un cas linéaire.....	61
3.5.2 Étude d'un cas non linéaire.....	64
3.6 Conclusion.....	72

CHAPITRE 4 : ANALYSE DES TOLÉRANCES AVEC

LA MÉTHODE STATISTIQUE.....	73
4.1 Introduction.....	73
4.2 Généralité de la méthode statistique.....	74
4.3 Analyse dans un cas d'empilage.....	75
4.4 Analyse dans un cas d'assemblage non linéaire.....	77
4.5 Approximation de la fonction de densité de Y	78
4.6 Analyse avec la méthode de simulation de Monte Carlo.....	79
4.7 Les coûts technologiques.....	81
4.8 Exemples d'application.....	83
4.8.1 Étude d'un cas linéaire.....	83
4.8.2 Étude d'un cas non linéaire.....	93
4.8.3 Analyse économique pour le cas non linéaire.....	98
4.9 Conclusion.....	100

CHAPITRE 5 : AUTRES MÉTHODES D'ANALYSE

DES TOLÉRANCES.....	101
5.1 Méthode intégrée de design des paramètres et des tolérances.....	101
5.1.1 Introduction.....	101
5.1.2 Méthode de Li et Wu.....	102
5.1.3 Conclusion sur la méthode.....	108
5.2 Méthode combinée de Wayne Taylor.....	108
5.2.1 Introduction.....	108
5.2.2 Description de la méthode.....	109
5.2.3 Flexibilité de l'approche de Taylor.....	111
5.2.4 Exemple d'application de la méthode.....	112
5.3 Modèle unifié d'analyse des tolérances de Greenwood et Chase.....	113
5.3.1 Introduction.....	113

5.3.2 Modèle associé à la méthode.....	114
5.3.3 Parallèle avec la méthode du pire cas et la méthode statistique.....	115
5.4 Conclusion.....	116
CONCLUSION.....	117
BIBLIOGRAPHIE.....	121
ANNEXES.....	126

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Type et moment d'intervention dans les étapes de conception.....	5
Tableau 2.1 : Options de robustesse pour le concepteur.....	19
Tableau 2.2 : Niveaux des facteurs pour les tolérances.....	40
Tableau 2.3 : Table d'ANOVA.....	42
Tableau 3.1 : Intervalle de variation de Y.....	67
Tableau 3.2 : Intervalle de variation de Y après l'ajustement des valeurs nominales.....	69
Tableau 3.3 : Intervalle de variation de Y après l'ajustement des tolérances.....	71
Tableau 4.1 : Analyse économique des tolérances	82
Tableau 4.2 : Écarts types des composants.....	99
Tableau 4.3 : Analyse économique des tolérances pour le cas non linéaire	99

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Exemple de communication des tolérances.....	4
Figure 1.2 : Exemple de plage de tolérance autour d'une valeur nominale τ	7
Figure 2.1 : Système de l'ingénierie qualité de Taguchi.....	14
Figure 2.2 : Les sources de variation dans un système.....	18
Figure 2.3 : Plans croisés.....	22
Figure 2.4 : Fonction de perte traditionnelle L_T	25
Figure 2.5 : Fonction de perte quadratique : cas d'une valeur nominale visée.....	27
Figure 2.6 : Fonction de perte pour une valeur minimale visée.....	29
Figure 2.7 : Fonction de perte pour une valeur maximale visée.....	30
Figure 2.8 : Signal-Bruit pour le système de freinage d'une voiture.....	33
Figure 2.9 : Calcul du rapport signal-bruit.....	36
Figure 2.10 : Graphiques des ratios SB par facteurs.....	37
Figure 3.1 : Exemple d'assemblage d'un cas linéaire.....	45
Figure 3.2 : Exemple d'assemblage d'un cas non linéaire.....	46
Figure 3.3 : Relation entre le coût et les tolérances.....	47
Figure 3.4 : Identification de l'espace de vide sur un assemblage.....	48
Figure 3.5 : Exigences sur V satisfaites.....	50
Figure 3.6 : Exigences sur V non satisfaites.....	50
Figure 3.7 : Exemple de calcul de T_Y^{Diff}	60
Figure 3.8 : Valeurs nominales et tolérances des composants de l'assemblage linéaire.....	62
Figure 4.1 : Cycle de simulation.....	80
Figure 4.2 : Graphique des fréquences pour le cas linéaire.....	85
Figure 4.3 : Statistiques descriptives pour le cas linéaire.....	85
Figure 4.4 : Graphique des fréquences sans la valeur extrême pour le cas linéaire.....	86
Figure 4.5 : Statistiques descriptives sans la valeur extrême pour le cas linéaire.....	86

Figure 4.6 : Contribution des composants à la variabilité totale	
pour le cas linéaire.....	87
Figure 4.7 : Graphique des fréquences pour le cas linéaire avec la loi uniforme.....	90
Figure 4.8 : Statistiques descriptives pour le cas linéaire avec la loi uniforme.....	91
Figure 4.9 : Contribution des composants à la variabilité totale avec	
la loi uniforme.....	91
Figure 4.10 : Graphique des fréquences avec la loi uniforme et les	
nouvelles tolérances.....	92
Figure 4.11 : Statistiques descriptives avec la loi uniforme et les	
nouvelles tolérances.....	92
Figure 4.12 : Contribution à la variabilité totale avec les nouvelles tolérances.....	93
Figure 4.13 : Graphique des fréquences pour le cas non linéaire.....	95
Figure 4.14 : Statistiques descriptives pour le cas non linéaire.....	96
Figure 4.15 : Graphique des fréquences sans les valeurs extrêmes	
pour le cas non linéaire.....	96
Figure 4.16 : Statistiques descriptives sans les valeurs extrêmes	
pour le cas non linéaire.....	97
Figure 4.17 : Contribution des composants à la variabilité totale	
pour le cas non linéaire.....	97
Figure 5.1 : Phases du procédé d'optimisation de Taguchi.....	101
Figure 5.2 : Distribution d'un procédé non centré sur sa valeur nominale.....	110
Figure 5.3 : Exemple d'application de la méthode de Taylor.....	113
Figure 5.4 : Variabilité d'un procédé en fonction de la déviation.....	115

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A : Résultats des simulations pour l'étude d'un cas linéaire.....	126
ANNEXE B : Résultats des simulations pour l'étude d'un cas linéaire avec une loi uniforme.....	131
ANNEXE C : Résultats des simulations pour l'étude d'un cas linéaire avec une loi uniforme et les nouvelles tolérances de X_2 et X_3.....	136
ANNEXE D : Résultats des simulations pour l'étude d'un cas non linéaire.....	141

INTRODUCTION

La compétition qui existe dans le monde industriel oblige les entreprises à se dépasser et à optimiser leurs procédés de fabrication. L'optimisation des procédés passe par la reconnaissance de l'importance de la gestion des tolérances. Par gestion des tolérances nous faisons allusion à plusieurs questions auxquelles font face les concepteurs et les fabricants de produits.

Quelles tolérances doivent avoir les composants pour qu'un assemblage réussisse ? Quels sont les composants critiques d'un assemblage ? Avec quelle méthode allons-nous faire l'analyse ? Quelle est la relation entre les tolérances des composants et les coûts associés et les bénéfices sur la qualité du produit ?

Trop souvent, ces questions sont répondues d'une façon non rigoureuse, par la méthode d'essais et erreurs. Ce mémoire a pour premier objectif d'expliquer l'importance de répondre à ces questions. Le deuxième objectif est de décrire les méthodes analytiques servant à répondre à ces questions.

Au chapitre 1, nous présentons le concept de tolérance et certaines définitions nécessaires par la suite. Nous exposons les éléments historiques ainsi qu'une brève revue de la littérature. Le chapitre 2 présente l'approche Taguchi pour la conception et la fabrication des produits. La notion de conception robuste et les avantages de l'approche sont abordés. Les chapitres 3 et 4 présentent les méthodes d'analyses mathématiques et statistiques qui sont utilisées pour l'analyse des tolérances : la méthode du pire cas et l'approche statistique. La méthode de simulations de Monte Carlo est présentée au chapitre 4. Celle-ci doit être vue comme un moyen qui facilite l'utilisation de la méthode statistique.

Ces trois méthodes sont appliquées à deux exemples : une relation linéaire et une relation non linéaire. Finalement, les nouvelles méthodes d'analyse proposées récemment ainsi que l'approche améliorée de Taguchi sont exposées au chapitre 5.

En fin, nous concluons notre mémoire avec une synthèse des avantages et inconvénients de chaque méthode. Nous le proposons pour servir de guide à celui qui doit entreprendre une analyse des tolérances.

CHAPITRE 1

LES TOLÉRANCES

Dans ce chapitre, nous introduisons le concept de tolérance et certaines définitions s'y rattachant. La problématique des tolérances est présentée dans un contexte de fabrication industrielle. Quelques éléments historiques ainsi qu'une brève revue de la littérature sont sommairement présentés.

1.1 Quelques éléments historiques sur les tolérances

Le concept de tolérance est étroitement relié à l'évolution du monde industriel. La mondialisation des marchés engendre une vive concurrence entre les entreprises. Les clients sont de plus en plus exigeants et soucieux de la qualité des produits qu'ils achètent. La demande pour des produits et des services de haute qualité stimule et est alimentée par l'évolution remarquable et accélérée des technologies. L'un de ces changements est le rôle joué par les tolérances dans les processus de design et de fabrication des produits et des procédés.

Avant le 19^{ième} siècle, le design était axé sur l'aspect fonctionnel du produit dans un contexte de production artisanale où la quantité produite n'était pas un facteur pris en considération. Au cours du 19^{ième} et du 20^{ième} siècle, le phénomène de production de masse et d'interchangeabilité des composants fait naître et rend essentiel le concept de tolérance.

La première utilisation qui est faite du concept de tolérance est associée à la communication des valeurs nominales de dimensions et des caractéristiques des matériaux utilisés ainsi que les variations permises autour des valeurs nominales. L'idée toute naturelle était de consigner et de conserver ces informations car cela répondait à une exigence minimale pour des fins de fabrication et de reproduction.

Au fur et à mesure que les techniques de travail et de production se sont améliorées, les tentatives pour conserver et communiquer les tolérances sont devenues de plus en plus importantes. Vers 1795, un processus de communication des tolérances voit le jour en Europe. Ce processus, que l'on retrouve sous l'appellation *GD&T* ("*Geometric dimensioning and tolerancing*"), est basé sur le développement d'un modèle graphique du design. Par la suite, ce modèle graphique s'est développé pour devenir un standard pour communiquer les dimensions et les tolérances.

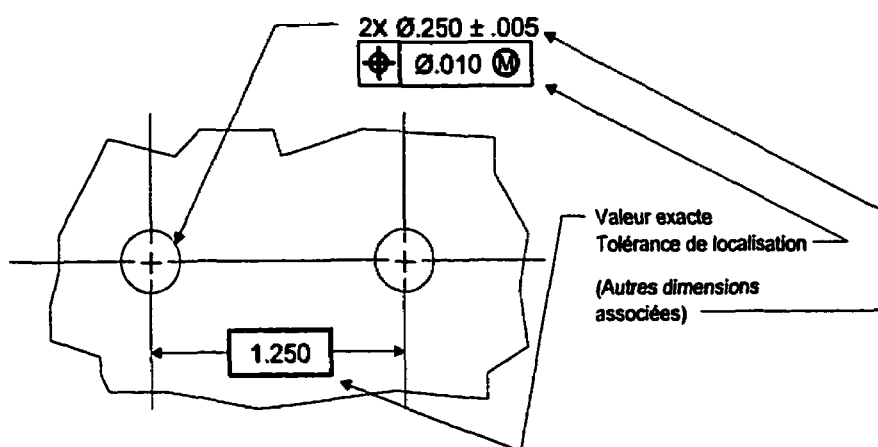


Figure 1.1 : Exemple de communication des tolérances

En plus d'être associé à la notion de communication, le concept de tolérance est étroitement lié au contrôle de la qualité. En 1924, le contrôle statistique de la qualité voit le jour grâce aux idées révolutionnaires de Walter Shewart. Dès lors, concepteurs et ingénieurs voient le rôle important des tolérances sans nécessairement en faire une priorité dans leurs préoccupations en fabrication et dans leur attitude envers la qualité. Durant les années 1950, l'importance des tolérances s'accroît avec les philosophies du contrôle de la qualité de W. Edwards Deming et plus particulièrement avec celle de Genichi Taguchi.

Taguchi propose une approche nouvelle reposant sur plusieurs nouveaux concepts. Notons les principales composantes de sa stratégie : la distinction des sources de variabilité en paramètres de contrôle et paramètres de bruit, l'utilisation des plans croisés pour les essais, la définition du rapport signal-bruit et son utilisation pour analyser les essais, l'introduction de la fonction de perte et sa minimisation, la conception robuste pour contrer les effets néfastes des sources de variabilité incontrôlables et enfin la distinction et l'introduction des trois étapes fondamentales de la conception formées par le concept, les paramètres et les tolérances. Ces éléments seront développés dans le chapitre 2.

Tableau 1.1 : Type et moment d'intervention dans les étapes de conception

Étapes de conception	Optimisation des valeurs cible	Réduction de la variabilité
Concept	0	0
Paramètre	0	0
Tolérance	X	0

0 – Action possible X – Action impossible

Les tolérances sont prises en considération dès la phase de conception du produit ou du procédé et non pas durant ou après la phase de fabrication. La conception et l'analyse des tolérances reposent sur un processus expérimental, une approche novatrice qui tranche sur tout ce qui existait auparavant. Jusque là, la principale méthode d'analyse des tolérances servait uniquement pour l'analyse de tolérances associées aux dimensions des composants formant un produit. Seuls les cas extrêmes où les dimensions étaient à leurs valeurs minimales ou à leurs valeurs maximales étaient utilisés et leurs impacts étaient étudiés. Cette méthode qui repose sur des situations très peu probables, donc conservatrices, est connue sous le nom de la *méthode du pire cas* dans la littérature.

Ce n'est que dans les années 1980 que les Américains prendront conscience des avantages à implanter la stratégie de Taguchi. Les concepteurs américains réalisent que la prise en considération des tolérances tard dans leur processus de fabrication ne permet pas d'atteindre des niveaux de qualité pour leurs produits permettant de livrer une concurrence aux produits provenant du Japon.

Durant cette période, l'approche et la philosophie qualité, aujourd'hui connue sous le nom *Six Sigma*, est développée à la compagnie américaine Motorola par Mikel J. Harry. Cette *stratégie d'affaires* a un objectif défini par trois composants reliés : l'utilisation des méthodes statistiques pour obtenir des processus de fabrication et d'affaire n'ayant pas plus de 3.4 défauts par millions d'occasions, l'identification et la réalisation de projets d'amélioration ayant des retombées économiques significatives pour la compagnie et l'utilisation de mesure de performance des processus et de satisfaction des clients. De nos jours, cette philosophie de qualité est en train de s'implanter dans de nombreuses entreprises comme GE, Allied Signal, Eastman Kodak, Bombardier, Maple Leaf Food, etc.

La conception et l'analyse des tolérances occupent une place aussi importante dans l'approche *Six Sigma* de Harry que dans celle de Taguchi. De nouvelles méthodes d'analyse des tolérances ont aussi été développées durant les dernières années. Il n'est plus seulement question de communiquer les tolérances, mais de connaître leurs influences sur la qualité et les coûts du produit. Donc, de faire des choix rationnels et économiques qui reposent sur une analyse objective.

1.2 Définitions

Le terme *intervalle de tolérance* représente l'ensemble des valeurs permises. Le centre de l'intervalle est la *valeur nominale*. Le plus souvent en pratique, c'est la demi-longueur de l'intervalle que l'on appelle tolérance, soit *l'écart maximal* entre la valeur

nominale et une valeur permise. La norme ANSI Y14.5M-1982 définit la tolérance comme la *distance totale*, c'est-à-dire la différence entre la valeur maximale permise et la valeur minimale permise.

Les tolérances peuvent donc être vues comme étant une plage permise autour d'une valeur nominale (τ) associée à une caractéristique qui est reliée à un produit ou un procédé. En général, la tolérance (noté T) correspond à une certaine portion de la plage qui est considérée comme acceptable. Dans certains ouvrages, la tolérance correspond non pas à une fraction de la plage, mais à la plage tout entière. La figure 1.2 présente un exemple de tolérance autour d'une valeur nominale.

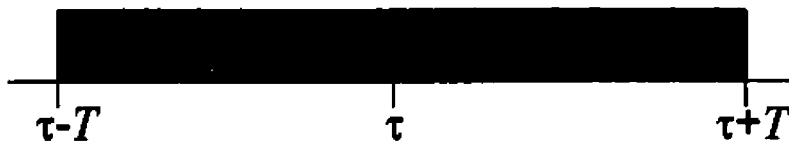


Figure 1.2 : Exemple de plage de tolérance autour d'une valeur nominale τ

La notion de tolérance est applicable au produit ou au procédé. Les tolérances associées à des caractéristiques d'un produit sont dites de type dimensionnelles (géométriques) ou de type fonctionnelles. La longueur, l'épaisseur sont des caractéristiques dimensionnelles tandis que la résistance à la rupture est une caractéristique fonctionnelle. Pour un procédé, les tolérances sont associées à des paramètres contrôlables du procédé, comme la température de cuisson, la durée d'une opération, etc.

On peut aussi faire une distinction entre les tolérances provenant du consommateur et celles provenant du producteur. En effet, le client fixe des limites de tolérances à partir desquelles il juge si le produit est acceptable. Toute caractéristique qualité qui n'est pas

à sa valeur nominale, mais qui se situe dans l'intervalle de tolérance, génère une perte selon Taguchi. Cette idée est fructueuse car elle pousse à l'amélioration le producteur et met au rancart une fois pour toute, l'idée d'une perte traditionnelle de zéro pour tous les produits dont la caractéristique qualité se situe dans l'intervalle de tolérance. Le producteur peut fixer les limites de tolérance mais le plus souvent ces limites doivent refléter les exigences des clients.

Puisqu'il est nécessaire de prendre en considération les attentes du client en parallèle avec ce qu'il est possible de faire au niveau de la production, les tolérances serviront de lien entre les deux parties. D'un côté, l'équipe de conception agit principalement en fonction de ce que le consommateur demande. Ceux-ci cherchent à resserrer les tolérances afin de s'assurer d'un haut niveau de performance.

De l'autre côté, l'équipe responsable de la production opte pour des tolérances plus relâchées qui feront en sorte de ne pas augmenter les coûts de production. La conception et l'analyse des tolérances permettent d'évaluer l'impact des tolérances au stade de la conception et de la production. Au stade de la conception, les tolérances ont un impact sur les dimensions résultantes, sur la performance du procédé ainsi que sur sa sensibilité et sa robustesse. Par contre, en production, l'impact se situe au niveau des différents coûts de production, sur l'assemblage, la sélection des procédés, sur les outils utilisés, etc. Ainsi, l'étude des tolérances permet d'arriver à une entente pour laquelle les exigences de chacun sont respectées le plus possible.

1.3 La problématique

Le procédé de fabrication d'un produit ou d'un procédé implique nécessairement la notion de tolérance. Cependant, bien que les concepts et les outils développés associés aux tolérances soient connus, l'implantation de ces derniers reste encore difficile.

Pour plusieurs, l'étude et le changement des tolérances impliquent principalement une augmentation des coûts de fabrication. Pour cette raison, l'assignation des tolérances est faite par convention et aucune méthode rigoureuse n'est appliquée. Bien souvent, une attention particulière est portée aux tolérances seulement lorsque celles-ci ne sont pas rencontrées ou encore lorsqu'un assemblage échoue. Les industries qui fonctionnent encore de cette façon oublient que l'influence des tolérances ne se limite pas aux coûts mais se traduit aussi en termes de qualité et de satisfaction de la clientèle.

La méthodologie de conception et d'analyse des tolérances est tout aussi importante que les tolérances elles-mêmes. Cette méthodologie doit permettre à l'équipe de conception et de fabrication de répondre efficacement à plusieurs questions. Quelles sont les caractéristiques clés du produit (procédé) ? Comment les tolérances affectent-elles la qualité ? Comment mesurer l'impact des tolérances sur la variabilité de l'assemblage ? Quelles sont les tolérances qui doivent être resserrées et lesquelles peuvent être relâchées ?

Cette démarche doit être rigoureuse et ne pas être basée sur la méthode d'essais et d'erreurs. Les tolérances et l'analyse de ces dernières doivent devenir une partie intégrante de tout procédé de fabrication et pris en considération dès la conception.

1.4 Littérature sur le concept de tolérances

Le concept de tolérances a fait l'objet de nombreuses monographies et articles. Les premiers ouvrages traitent principalement de la façon de communiquer les tolérances. Encore aujourd'hui, la procédure de communication (*GD&T*) est un sujet abordé dans plusieurs livres qui sont utilisés principalement dans le domaine du génie mécanique.

L'évolution du rôle des tolérances a amené la publication d'ouvrages traitant de l'analyse des tolérances. Beaucoup d'ouvrages présentent la méthode analytique basée sur les cas extrêmes d'assemblage. Avec l'arrivée de la philosophie sur la qualité de Taguchi, la façon de concevoir et d'analyser les tolérances prennent une autre dimension. L'approche en trois phases de Taguchi est une démarche plus expérimentale permettant de montrer le rôle des tolérances entre le processus de conception et de fabrication d'un produit (procédé). La réduction de la variabilité, une optimisation des valeurs nominales des caractéristiques et une optimisation des tolérances autour de ces valeurs nominales.

L'utilisation des méthodes statistiques, l'analyse de la variance par exemple, permet d'analyser les tolérances dans un contexte plus probabiliste. L'utilisation de la fonction de perte développée par Taguchi est un autre outil qui permet d'étudier l'impact des tolérances. Taguchi a exposé sa démarche dans plusieurs ouvrages dont Taguchi (1986), Taguchi (1987), Taguchi et al. (1989), Taguchi (1993) et Taguchi (2000).

Dans les années 1980, Mikel J. Harry développe une stratégie de la qualité intégrant au management les méthodes statistiques pour réduire la variabilité et réduire les coûts de la non-qualité. Harry et Stewart (1988) publient *Six Sigma Mechanical Design Tolerancing* qui propose une démarche ainsi que des outils statistiques pour l'analyse des tolérances. Ils proposent de nouvelles métriques permettant de calculer des probabilités de succès ou d'échec dans les assemblages. Dans les mêmes années, Cox (1986) présente comment faire l'analyse des tolérances avec une approche probabiliste.

Greenwood et Chase (1987) et Wayne Taylor (1995) proposent une méthode combinant la méthode traditionnelle d'analyse du pire cas avec la méthode statistique. Cette méthode a l'avantage d'être plus flexible et permet de mieux analyser les produits ou procédés sur lesquels les deux types d'analyses seraient nécessaires.

Plus récemment, des auteurs se sont penchés sur le processus en trois phases de Taguchi. Reconnaisant le besoin d'améliorer la procédure, Chan et Xiao (1995) ont développé une méthode itérative en deux étapes permettant d'optimiser les tolérances. Comme pour la méthodologie de Taguchi, cette méthode repose sur l'optimisation des valeurs nominales et ensuite l'optimisation des tolérances. Dans la même année, Bisgaard et Ankenman proposent que deux des trois phases de l'approche de Taguchi soient effectuées simultanément et non plus séparément. Ces derniers n'ont toutefois développé aucune méthodologie systématique. En 1999, Le et Wu développent un algorithme qui combine l'optimisation des valeurs nominales et des tolérances. À l'aide de la fonction de perte développée par Taguchi, les auteurs suggèrent une fonction des coûts totaux reposant sur les valeurs nominales et les tolérances. L'optimisation de cette fonction des coûts permet de prendre en considération les valeurs nominales et les tolérances simultanément.

1.5 Conclusion

Le concept de tolérance est présent depuis déjà plusieurs années et les méthodes de développement et d'analyse des tolérances n'ont cessé d'évoluer et de s'améliorer. Ce mémoire se veut être une synthèse de ce qui a été fait en termes de conception et d'analyse des tolérances.

CHAPITRE 2

LES TOLÉRANCES ET LA CONCEPTION DE PRODUITS

Notre étude des tolérances et des problèmes associés est placée dans le cadre de la conception et du développement de produit. La notion de qualité et de variabilité est au centre de toutes les questions de la gestion, de l'amélioration et du contrôle de celle-ci. Le système intégré de l'ingénierie de la qualité proposé par Genechi Taguchi nous fournit la structure de base de notre présentation. Nous présentons un survol de sa puissante méthodologie de conception robuste, un outil pour concevoir la qualité à l'étape du design du produit, là où les gains en qualité sont les plus importants. Nous verrons la place des tolérances dans cette démarche intégrée.

2.1 La conception et le développement de produit

2.1.1 Les étapes

Le cycle de vie d'un produit peut se résumer par : conception-fabrication-utilisation. On reconnaît généralement les phases principales suivantes dans les cycles de conception, de développement et de mise en marché d'un produit :

1. l'identification du besoin et du marché,
2. la sélection du concept,
3. la conception du produit,
4. la confirmation du produit,
5. la conception du procédé de fabrication,
6. la confirmation du procédé de fabrication,
7. la fabrication,
8. la mise en marché.

La tendance des dernières décennies est d'utiliser le principe de l'ingénierie simultanée plutôt que de parcourir les étapes séquentiellement, en particulier pour les étapes de conception du produit et du procédé de fabrication. Cela présente de nombreux avantages, par exemple, la réduction du temps de développement pouvant aller jusqu'à 50 %. L'avantage concurrentiel qui résulte est indéniable. La mise en œuvre de cette stratégie ne peut pas se réaliser sans la maîtrise de nouvelles technologies et méthodologies. Par exemple, des logiciels évolués de conception par ordinateur, les études de simulations, le déploiement de la "maison de la qualité", la conception robuste de Taguchi et bien d'autres outils dont nous ne ferons pas la liste exhaustive.

Nous allons présenter certains éléments que nous jugeons pertinents pour illustrer la place des tolérances dans ce processus de l'ingénierie du produit. C'est à l'étape de conception du produit et du procédé de fabrication ainsi qu'à l'étape de fabrication que les tolérances occupent une place prépondérante.

Clausing (1994) divise la conception du produit et du procédé en quatre étapes :

1. le développement du concept,
2. le design et l'optimisation des paramètres du produit,
3. le design et l'optimisation des tolérances,
4. le design et l'optimisation des paramètres du procédé.

Ces étapes sont présentées dans la figure 2.1 dans le système intégré de l'ingénierie de la qualité proposé par Taguchi. La figure inclut l'élément de contrôle de qualité en cours de fabrication, une étape qui n'est pas abordée dans ce mémoire.

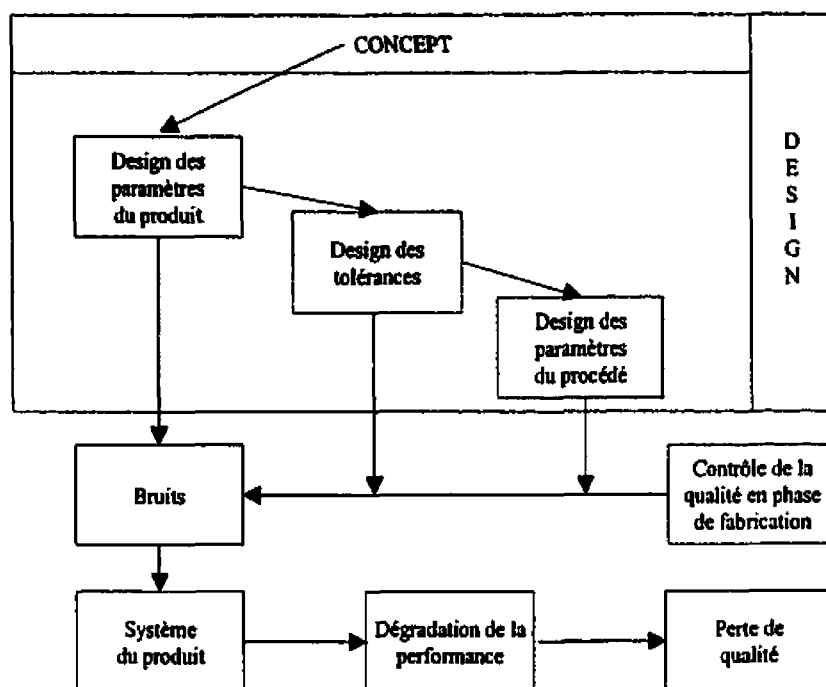


Figure 2.1 : Système de l'ingénierie qualité de Taguchi
adapté de Clausing p. 78

Genichi Taguchi distingue deux types de contrôle de la qualité. Le premier type de contrôle est réalisé durant la phase de conception du produit est ce qu'il appelle le "*off-line quality control*" tandis que le deuxième type de contrôle s'applique à l'étape de production et est identifié par le "*on-line quality control*". Ces deux types de contrôle reposent sur des méthodes différentes et complémentaires.

L'objectif du contrôle de la qualité en phase de conception est de pouvoir garantir ou améliorer la qualité d'un produit (procédé) en augmentant sa *robustesse* face aux différentes sources de variabilité incontrôlable identifiées sous le vocable de facteurs de bruit ("*noise factors*"). Ces sources de variabilité sont de trois ordres : les variations dans les conditions d'utilisation, les variations en cours de production et finalement, les détériorations ou variations avec le temps (fiabilité) durant leur usage.

Le contrôle appliqué lors de la production servira à maintenir le niveau de qualité qu'il a été possible d'atteindre grâce au travail fait durant la phase de design. Toute cette philosophie peut être vue comme du contrôle de la qualité pro-actif et réactif. Les actions entreprises pour améliorer la qualité lors de la phase de conception sont celles qui ont le plus d'impact sur le produit final. L'emphase est donc mise sur le contrôle de la qualité durant la période de conception. Cependant, les méthodes associées au contrôle en phase de production devront être implantées en conjonction avec celles utilisées en phase de conception. En effet, il n'est pas efficace de consacrer des ressources à rendre un produit robuste s'il n'est pas possible de pouvoir maintenir et contrôler le niveau de qualité réalisable à l'étape de conception (Shina, 1991).

2.1.2 Le design du concept

Cela consiste à exploiter les connaissances scientifiques et la technologie pour concevoir un prototype ou concept supérieur du produit. La méthode de Pugh (1991) est souvent employée dans ce processus de sélection. Le choix entre différents prototypes constitue la première étape dans le développement d'un produit. Durant cette phase, les besoins du consommateur ainsi que ceux de l'environnement sont pris en considération.

Le processus de sélection se fait principalement avec la méthode du balisage compétitif ("*competitive benchmarking*"), en comparant différentes technologies. Pour arriver à choisir un concept supérieur, un ensemble d'outils est disponible. L'utilisation de ces outils demande une grande connaissance des technologies qui existent et de leurs relations. C'est pourquoi une équipe de travail multidisciplinaire (concepteurs, ingénieurs, statisticiens, etc.) est essentielle pour obtenir un point de vue intégral englobant toutes les multiples dimensions de la conception. Cette notion d'équipe multidisciplinaire sera aussi utile dans les étapes suivantes.

D'une manière générale, on combine une ou plusieurs méthodes selon les besoins: le déploiement de la fonction qualité ("*Quality Function Deployment*" (QFD)), l'Analyse des Modes de Défaillances, leurs Effets et leurs Criticités (AMDEC) ("*Failure Mode and Effect Analysis*" (FMEA)), l'analyse des arbres de pannes ("*Fault Tree Analysis*" (FTA)) ainsi que la méthode TRIZ. La méthode QFD est un processus permettant de traduire les attentes du client dans des caractéristiques techniques du produit ou du service. L'AMDEC est une analyse des problèmes potentiels anticipés qui peuvent se produire lors de l'utilisation d'un produit ou d'un procédé. TRIZ est une méthode qui repose sur une classification des inventions. L'idée derrière cet outil est d'amener les concepteurs à imaginer des états futurs du produit. Ces méthodologies sont présentées dans Crevelling (1997), Shina (1991) et Clausing (1994).

En plus de l'utilisation de un ou plusieurs de ces outils, il est possible d'évaluer la supériorité d'un concept à l'aide des caractéristiques qualité *Y*. Un concept pour lequel les caractéristiques qui s'y rattachent sont évidentes sera évalué plus facilement et plus efficacement qu'un autre pour lequel il est difficile de définir des mesures de performance qualité.

À la fin de cette étape, l'équipe de conception devrait détenir un concept supérieur. Il est important que le concept retenu soit suffisamment développé et présente un potentiel certain de fabrication pour se retrouver sur le marché. Les étapes de design des paramètres et de design des tolérances reposent sur cette hypothèse voulant que le concept sélectionné soit supérieur. Sinon, ces étapes subséquentes ne produiront pas de résultats intéressants.

2.2 Le design des paramètres

2.2.1 La conception robuste de Taguchi

Cette étape est au centre de la stratégie et de la méthodologie de Taguchi. Il propose l'idée et une méthode pour réaliser de la *conception robuste* de produit. Taguchi identifie des facteurs incontrôlables (appelés facteurs de bruit) que le concepteur ne veut pas ou ne peut pas directement contrôler. Ces facteurs proviennent de trois sources :

- *la variabilité des conditions d'utilisation,*
- *la variabilité des conditions normales de fabrication,*
- *le vieillissement et autres détériorations.*

Taguchi définit un **produit robuste** comme *celui, qui, sous des coûts de fabrication minimum, présente une bonne qualité qui est peu affectée par les facteurs de bruit.*

2.2.2 Le système

Chaque produit ou procédé peut être présenté comme un système auquel est associé des variables d'entrée et des variables de sortie. Les variables d'entrée correspondent à ce qui est contrôlable dans la fabrication du produit (procédé). Les variables de sortie correspondent à des variables dites de réponse. C'est ce que les concepteurs mesurent pour vérifier si le produit est conforme à ce qui est implicitement désiré par le consommateur. Ces variables de réponses sont aussi appelées les caractéristiques de qualité. Bien que les concepteurs contrôlent les variables d'entrée et la variabilité associée à celles-ci, il y a toujours des sources de la variabilité qu'ils ne sont pas en mesure de contrôler. C'est ce que l'on appelle les sources de variabilité incontrôlables ou encore les *facteurs de bruit* associés au système. Toutes ces sources de variabilité

font en sorte que les produits fabriqués ne sont pas tous identiques et que leur performance peut varier dans le temps en cours d'utilisation.

On distingue deux catégories de variabilité incontrôlable Z ayant un impact sur les variables de réponse Y : externe et interne. Par exemple, la température, l'humidité, la poussière ainsi que la variabilité des conditions d'utilisation sont des sources de variabilité externe au procédé de fabrication. Les variations de la matière première ainsi que la détérioration des conditions normales d'opération durant la fabrication sont des sources de variabilité internes.

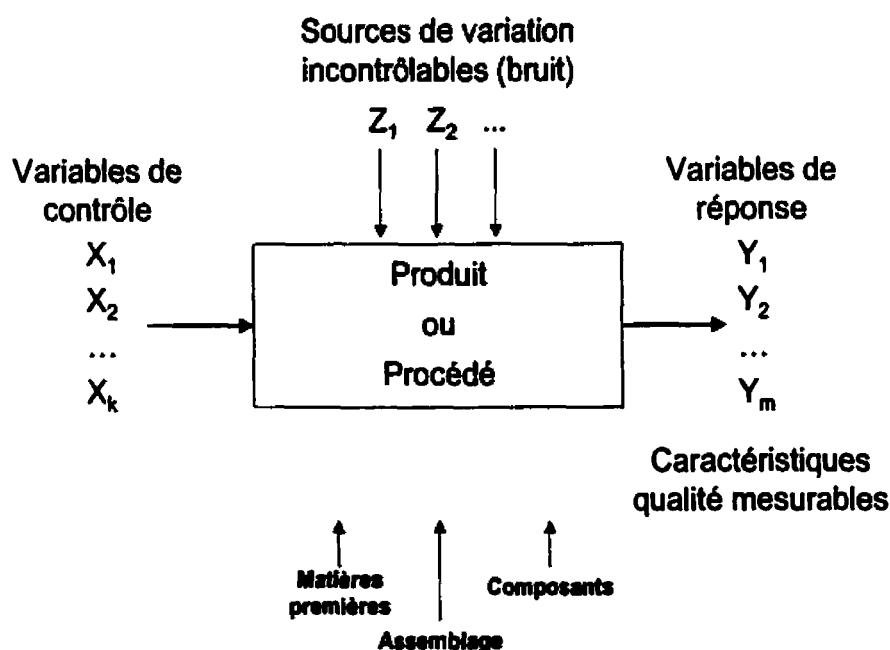


Figure 2.2 : Les sources de variation dans un système

L'objectif de la conception robuste est d'optimiser le produit (procédé) en exploitant les variables de contrôle X afin que la performance du produit mesurée par Y soit insensible aux sources de variabilité incontrôlables Z . Bajarria (1996) définit la

robustesse comme suit : *propriété du design qui exploite les interactions entre les variables X et Z et qui ne nécessite pas d'intervention humaine pour obtenir une performance acceptable du produit par rapport à une ou plusieurs caractéristiques Y critiques à la qualité.*

Le tableau 2.1 résume les différentes possibilités qui s'offrent au concepteur de produit et procédé.

Tableau 2.1 : Options de robustesse pour le concepteur

	Découpler les interactions entre les variables incontrôlables et contrôlables	Automatiser les interactions entre les variables incontrôlables et contrôlables	Découpler la relation entre deux ou plusieurs variables de réponses
Design du produit	Catégorie 1	Catégorie 2	Catégorie 3
Design du procédé	Catégorie 4	Catégorie 5	Catégorie 6

Cette définition rejoint celle de Taguchi qui a été présentée plus tôt.

2.2.3 La stratégie de Taguchi

À l'origine, le travail de l'ingénieur consiste à créer et développer un produit répondant à la qualité demandée par le client. Quelques prototypes sont développés et certains d'entre eux sont mis à l'essai. D'abord sous des conditions normales d'utilisation, et par la suite, sous une variété de conditions d'utilisation. Si les essais échouent, le concept est redéfini en effectuant les correctifs requis jusqu'au succès complet de tous les tests nécessaires. Cette méthode de développement où l'on fait souvent varier un paramètre à la fois pourrait se caractériser par une *méthode de tâtonnement* guidée par l'intuition relevant plutôt de l'intuition que d'une démarche scientifique.

L'ingénierie robuste vise à obtenir une fonction robuste, et par conséquent, à s'intégrer dans la phase initiale de développement du produit. Les concepts initialement développés sont directement soumis à quelques conditions d'essai et le design optimal le plus robuste est le résultat d'une optimisation sur les paramètres contrôlables dans des conditions de facteurs de bruit.

La *conception paramétrique robuste* est l'optimisation des valeurs nominales afin de réaliser la robustesse dans le plus court laps de temps. Les étapes du processus de conception paramétrique proposés par Taguchi sont :

- a) Définir la métrique de performance.
- b) Définir les valeurs possibles de chaque paramètre critique.
- c) Sélectionner des alternatives pour fin d'évaluation.
- d) Imposer des conditions de bruit.
- e) Évaluer la performance des alternatives.
- f) Choisir le meilleur design.
- g) Confirmer la robustesse du meilleur design.

Le choix de la mesure de performance Y est critique. La réponse Y doit représenter le plus fidèlement possible la transformation d'énergie venant du signal d'entrée.

Généralement on utilise trois valeurs possibles pour chacun des paramètres critiques. Le nombre total de possibilités croît de façon exponentielle et il faut trouver un moyen de limiter le nombre d'alternatives à tester. Heureusement, l'utilisation des plans d'essais conçus avec des principes statistiques vient apporter une réponse pour sélectionner des alternatives. Les plans hyper Greco Latin (arrangements orthogonaux) de 18 essais et de 27 essais, par exemple, sont très employés pour le choix des tests à réaliser. La propriété d'orthogonalité et d'équilibre des différentes combinaisons est fondamentale ici. En particulier, cela permet de séparer les effets principaux de chaque paramètre

indépendamment des autres. Ce premier plan de tests construits avec les facteurs de design (contrôlables) constitue le plan interne (inner array).

On impose les bruits à l'aide d'un deuxième design expérimental appelé *plan externe* (*outer array*). Chaque combinaison de paramètres définie par le premier design expérimental (*plan interne* ou *inner array*) est évaluée sous les conditions de bruit du plan externe et donne le rapport signal-bruit SB qui sera défini plus loin.. Par exemple, si on a 7 facteurs de bruit que l'on fait varier à deux valeurs extrêmes on pourrait choisir un plan de 8 essais. Si le plan interne contient 27 combinaisons, disons, il y aura un grand total de $27 \times 8 = 216$ mesures de la réponse et 27 rapports *signal-bruit* SB.

La sélection de l'arrangement orthogonal dépend du nombre de facteurs et du nombre de niveaux que l'on veut pouvoir étudier. Pour chaque type de facteur, contrôlable et de bruit, un tableau orthogonal est sélectionné. Puisque les facteurs de bruit sont des facteurs non contrôlables qui devront être contrôlés lors des essais, le nombre de facteurs de bruit est généralement petit. Une fois les tableaux sélectionnés, ceux-ci sont croisés. Pour chaque essai du tableau associé aux facteurs contrôlables, chacun des essais associés au tableau des facteurs de bruit est effectué. La figure 2.3 présente un exemple de plans croisés où le nombre de facteur contrôlables à l'étude est de quatre avec trois niveaux chacun et le nombre de facteur de bruit est de trois avec deux niveaux.

Facteurs contrôlables					Facteurs de bruit			
	X_1, X_2, X_3, X_4					Z_1, Z_2, Z_3		
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	1	2	2
3	1	3	3	3	3	2	1	2
4	2	1	2	3	4	2	2	1
5	2	2	3	1				
6	2	3	1	2				
7	3	1	3	2				
8	3	2	1	3				
9	3	3	2	1				

Figure 2.3 : Plans croisés

2.2.4 Remarques concernant la stratégie de Taguchi

a) La réponse Y et la performance fonctionnelle signal-bruit SB

On recherche une fonction Y qui capture les éléments essentiels de la physique de la transformation entre le signal d'entrée et la sortie. La tendance naturelle est souvent d'employer des variables comme le taux de panne. Toutefois, cette mesure est une *piètre mesure de performance* dans un contexte de développement de produit. La métrique de comparaison des différents designs doit incorporer l'effet des facteurs de bruit. Le rapport signal-bruit SB sera la métrique de performance fonctionnelle pour comparer les designs. Cette métrique sera présentée plus loin.

b) Le choix des valeurs et du nombre de paramètres

Sur la base d'un jugement collectif, l'équipe doit choisir pas plus d'une quinzaine de paramètres critiques. Il faut aussi limiter le nombre de modalités de chaque paramètre. Il faut au moins deux valeurs et préférentiellement trois valeurs pour couvrir l'intervalle de

faisabilité. Si on choisit trois valeurs il est recommandé de prendre une valeur inférieure et une valeur supérieure à la valeur nominale envisagée. En général, les évaluations sont réalisées expérimentalement et il faut limiter le nombre d'essais. Par exemple, si on considère le cas de 10 facteurs, chacun variant à 3 valeurs, alors le nombre d'essais ou de tests est de 3^{10} (= 59 049), ce qui n'est pas envisageable.

c) Le choix des designs d'évaluation

On vient rapidement à la conclusion que la seule alternative est l'utilisation des plans d'essais conçus sur la base de principes statistiques. Taguchi propose l'utilisation des plans expérimentaux dits *arrangements orthogonaux* ayant la propriété fondamentale de séparer les effets principaux indépendamment les uns des autres. Le plan à 18 essais et le plan à 27 essais sont parmi les designs statistiques les plus employés. Le principe de la conduite des essais dans un ordre aléatoire (*randomisation*) n'est pas toujours réalisé car dans les expériences d'optimisation de robustesse on impose un contrôle sur les facteurs de bruit en imposant de grandes variations permettant de capturer l'étendue de l'erreur expérimentale.

d) Les conditions de bruit

Le principe de base est de se placer dans des conditions qui vont provoquer les modes de défaillance. Les arrangements orthogonaux sont encore utilisés. Le plus souvent les facteurs de bruit varient à deux modalités et on recherche les combinaisons de facteurs qui sont susceptibles de provoquer des modes de défaillance.

e) L'évaluation des designs sélectionnés

Pour chaque combinaison des facteurs contrôlables de design, on évalue le rapport signal-bruit SB sur l'ensemble des conditions de facteurs de bruit.

f) L'identification du design optimal

On évalue le rapport SB qui sera utilisé pour identifier le design optimal. Les valeurs du rapport SB n'ont pas d'interprétation absolue car leurs valeurs changent si on change les conditions de bruit. Mais les valeurs relatives du rapport SB seront inchangées et les plus grandes valeurs permettront d'identifier le ou les designs optimaux. On peut estimer l'effet de chaque facteur sur le rapport SB en effectuant une analyse de la variance. On peut donc ainsi identifier les facteurs de design les plus importants. De plus, on peut déterminer la modalité optimale de chaque facteur. On se rappellera que l'on fait l'hypothèse d'addition des effets principaux en adoptant un modèle du premier ordre entre la réponse et les facteurs de design. Généralement, moins de la moitié des facteurs de design sont critiques pour le choix de leurs modalités optimales. Pour les autres facteurs on choisit la modalité la plus économique.

La robustesse recherchée ayant ainsi été obtenue, il faut identifier au moins un facteur d'ajustement qui permet de se rapprocher de la cible. Il s'agit d'un facteur qui n'a pas ou peu d'effet sur le rapport SB, c'est à dire qui se retrouve parmi les facteurs les moins influents. Une analyse de la variance sur la réponse moyenne de chaque design permettra d'identifier les facteurs pouvant jouer le rôle d'ajustement. Cette optimisation en deux étapes s'applique uniquement dans le cas où l'on vise une valeur nominale.

g) La confirmation

Après avoir déterminé le design qui semble optimal, on peut faire une prédiction de sa performance. Il est presque certain que le design optimal identifié n'est pas parmi la liste des designs d'évaluation. On doit confirmer sa supériorité en effectuant des essais avec ce design. Ces essais devraient donner une performance assez près de la valeur de performance prédite. Sinon on doit conclure que certaines hypothèses n'étaient pas valides. Mais en général, on aura réalisé une amélioration significative dans le design du produit particulièrement au niveau de sa robustesse.

2.2.5 La fonction de perte

Traditionnellement, on qualifiait le produit de bonne qualité lorsque la caractéristique qualité Y mesurée se situait à l'intérieur des limites de spécification. Dans le cas contraire, le produit était déclaré de mauvaise qualité. On peut donc caractériser cette vision bipolaire de la qualité par une fonction de perte, notée L_T , et définie par

$$L_T(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau - T \leq y \leq \tau + T \\ A & \text{si } y < \tau - T \text{ ou } y > \tau + T \end{cases} \quad (2.1)$$

où $L_T(y)$ = perte associée à la caractéristique qualité mesurée y

τ = Valeur nominale visée pour la caractéristique qualité

T = Tolérance acceptée autour de la valeur nominale

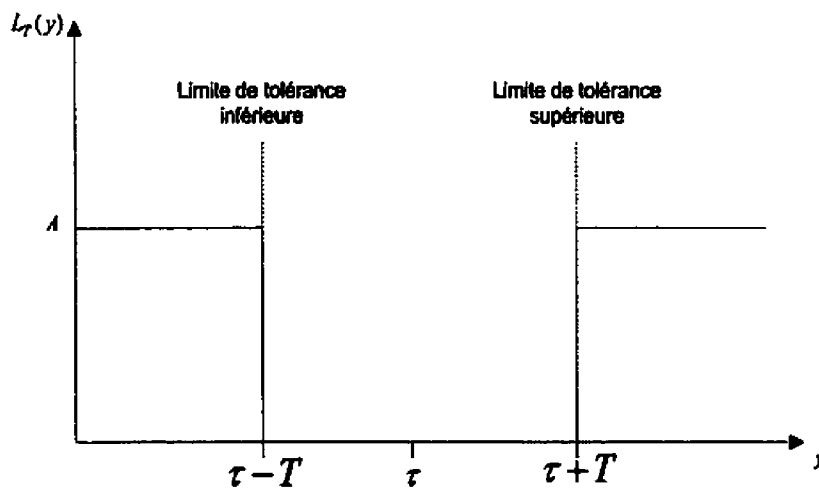


Figure 2.4 : Fonction de perte traditionnelle L_T

À l'intérieur de la plage $(\tau - T, \tau + T)$, il n'y a aucune perte et, à l'extérieur, la perte est de A . Ce coût peut être celui associé à la réparation ou à la mise au rebut de la pièce dont la caractéristique qualité n'est pas acceptable. Cette fonction de perte traditionnelle

présente des faiblesses. En effet, cette approche ne tient pas compte que des pertes sont engendrées à mesure que la caractéristique qualité s'éloigne de sa valeur nominale. Tous les produits dans l'intervalle de spécification ne sont pas de qualité égale. La notion de perte associée à toute déviation relative à la valeur nominale est prise en compte par d'autres fonctions de perte plus réalistes proposées par Taguchi. Il propose de remplacer la fonction de perte traditionnelle L_T par une fonction de perte quadratique, notée L_Q , plus réaliste.

Dans le cas d'une caractéristique qualité statique Y , on peut supposer, sans perte de généralité, que ses valeurs sont positives. Il y a toujours une cible associée à Y . Il y a trois possibilités pour la cible :

- viser une valeur nominale $\tau > 0$,
- viser une valeur maximale (implicitement ∞),
- viser une valeur minimale (implicitement 0).

Taguchi propose plusieurs formes de fonction de perte selon les circonstances. Dans le cas de caractéristique qualité dynamique Y , il a aussi proposé une fonction de perte quadratique. Nous présentons seulement les cas de caractéristique qualité statique.

a) Valeur nominale visée

Avec la valeur nominale (τ) visée on associe une plage de tolérance (T). Il y a perte dès que la caractéristique qualité s'éloigne de sa valeur nominale. La fonction de perte quadratique est décrite par l'équation (2.2). Elle se justifie tout naturellement par le fait que :

$$L_Q(Y = y = \tau) = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} L_Q(Y = y = \tau) = 0 \quad (2.2)$$

Il suit alors que la fonction de perte doit avoir une forme quadratique

$$L_Q(y) = k(y - \tau)^2 \quad (2.3)$$

où k est un coefficient associé à la concavité de la courbe. La valeur de k peut se déterminer si on connaît la fonction de perte à une valeur particulière de Y . Par exemple, si

$$Y = \tau + T \text{ (ou } \tau - T) \text{ et que } L_Q(Y = \tau + T) = A$$

alors nous obtenons immédiatement

$$k = \frac{A}{T^2} \quad (2.4)$$

La fonction quadratique L_Q est présentée à la figure 2.5

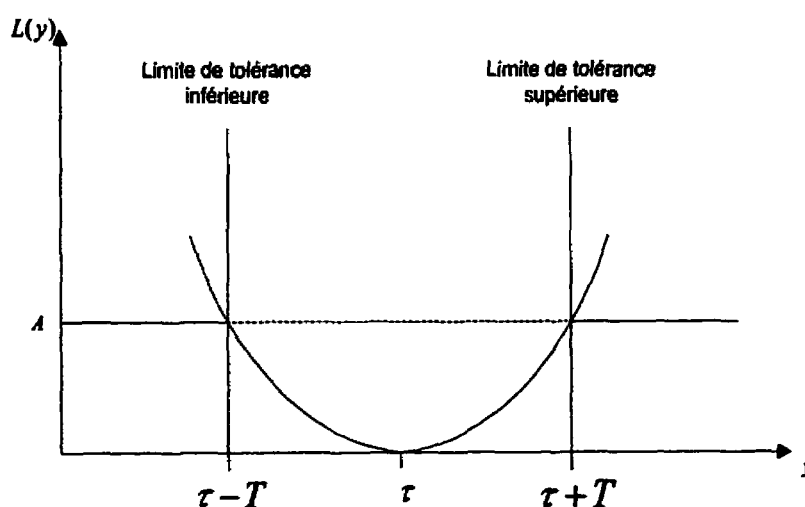


Figure 2.5 : Fonction de perte quadratique : cas d'une valeur nominale visée

L'équation (2.4) s'applique à une seule pièce. La perte quadratique moyenne L_Q pour un lot de pièces s'obtient en calculant l'espérance mathématique de $L_Q(y)$, noté $E(L_Q)$, par rapport à la distribution $f(y)$ de la caractéristique qualité des pièces. Ainsi

$$E(L_Q) = k[\sigma^2 + (\mu - \tau)^2] \quad (2.5)$$

où σ^2 sera estimée par la variance échantillonnale s^2 et μ par la moyenne échantillonnale \bar{y} . L'équation (2.5) devient avec ces estimations

$$\hat{E}(L_Q) = k[s^2 + (\bar{y} - \tau)^2] \quad (2.6)$$

b) Valeur minimale visée

Dans certaines applications, on cherche à minimiser la valeur de la caractéristique qualité. La valeur nominale implicitement visée est zéro ($\tau = 0$) car on fait l'hypothèse d'une caractéristique qualité à valeurs positives. Le nombre de fuite de radiation d'un four à micro-ondes, le temps de réponse d'un ordinateur, la perte de courant d'un circuit électronique sont des exemples.

Il n'y a pas d'intervalle de tolérance comme dans le cas d'une valeur nominale. On fixe une valeur y_0 au-delà de laquelle le produit serait déclaré de qualité inacceptable.

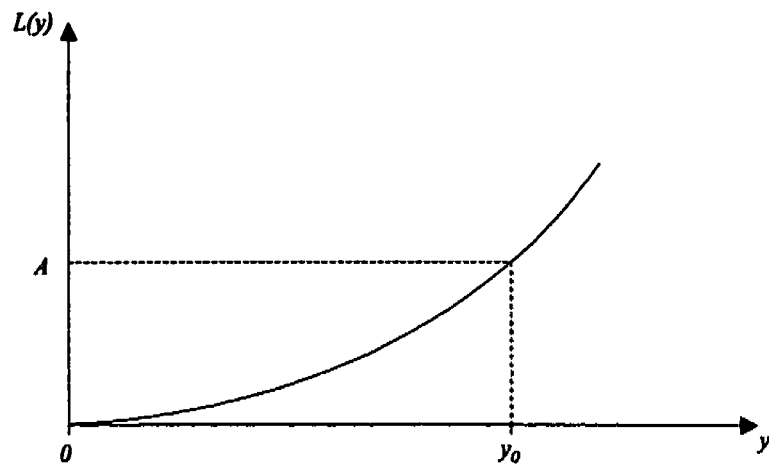


Figure 2.6 : Fonction de perte pour une valeur minimale visée

La fonction de perte quadratique associée prend alors la forme :

$$L(y) = ky^2 \quad (2.7)$$

où k , A et y_0 sont liés par la relation

$$k = \frac{A}{y_0^2} \quad (2.8)$$

La perte quadratique moyenne $E(L_Q)$ sera estimée sur un échantillon y_1, y_2, \dots, y_n par

$$\hat{E}(L_Q) = k(s^2 + \bar{y}^2) = k \sum y^2 \quad (2.9)$$

c) Valeur maximale visée

Il arrive que l'on cherche à maximiser la caractéristique qualité. La valeur nominale implicitement visée est l'infini. Par exemple, la force d'adhérence, la résistance d'un acier, etc.

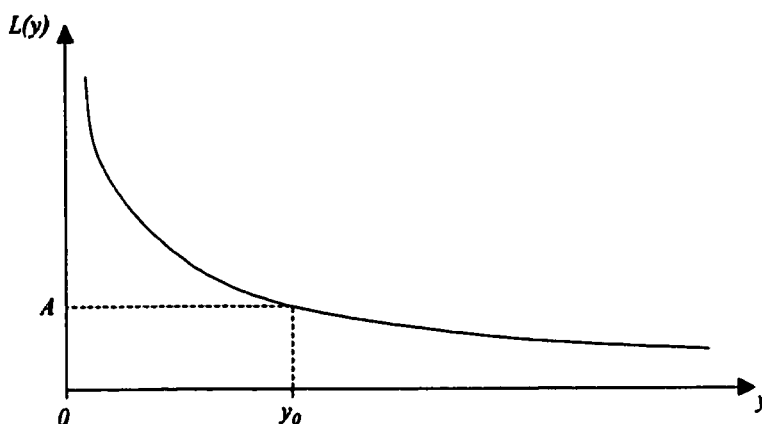


Figure 2.7 : Fonction de perte pour une valeur maximale visée

Encore ici, il n'y a pas d'intervalle de tolérance et une valeur y_0 est définie par convention pour classer les produits. L'équation (2.10) présente la fonction de perte pour ce cas. On définit l'inverse ($1/Y$) de la caractéristique qualité Y pour se ramener au cas de valeur minimale visée

$$L(y) = k \left(\frac{1}{y^2} \right) \quad (2.10)$$

où

$$k = Ay^2. \quad (2.11)$$

La perte quadratique moyenne $E(L_Q)$ sera estimée sur un échantillon y_1, y_2, \dots, y_n .

$$\hat{E}(L_Q) = k \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{y_i^2} \right) \quad (2.12)$$

2.2.6 Le rapport signal-bruit *SB*

La démarche de Taguchi vise à rendre un produit robuste face aux différentes sources de variation dites variables de bruit. Comment définir et mesurer la robustesse ? Il existe plusieurs sources d'information sur la qualité du produit-procédé pouvant servir de base afin de définir un indicateur de robustesse. Durant la phase de fabrication du produit et après, en utilisation, nous avons les indicateurs :

- satisfaction des limites de spécification
- analyses sur des données de fiabilité
- information sur les garanties
- indices de capabilité C_p / C_{pk}
- nombre de défauts par million d'occasions DPMO
- nombre de cycles (ou délai) avant panne

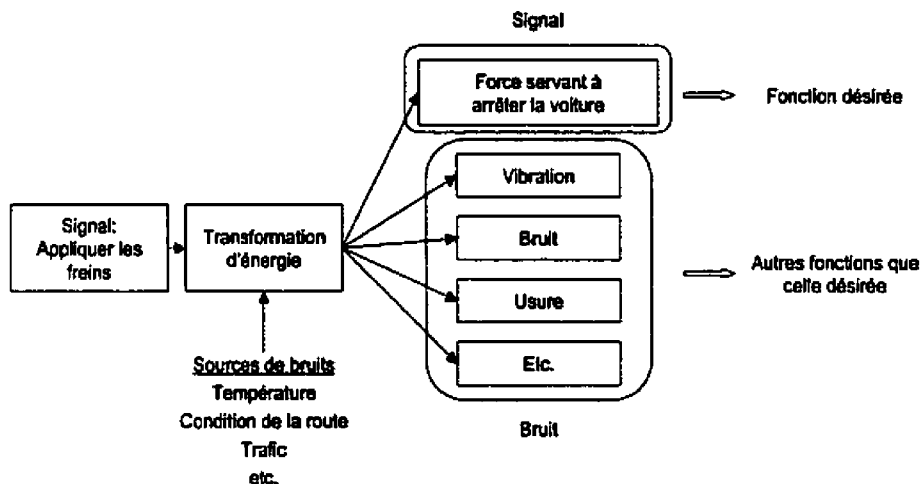
Bien que ces sources de données apportent de l'information pour évaluer la qualité, celles-ci ne peuvent être calculées que tardivement dans le cycle de développement d'un produit-procédé. Taguchi propose le *rapport signal – bruit (SB)* (*Signal-Noise (S/N) ratio*) comme mesure de robustesse. Pour justifier ce rapport, il faut analyser la relation qui existe entre les variables d'entrée X et les variables de sortie Y d'un système.

Un système technique conçu par l'homme convertit intentionnellement une forme d'énergie en une autre forme d'énergie selon des lois de la physique. Ces systèmes sont conçus pour générer des applications désirées par l'utilisateur. Dans ces systèmes techniques, il existe une relation optimale du comportement entre la sortie et l'entrée: c'est la fonction idéale. L'objectif de la conception robuste est de se rapprocher le plus possible de cette fonction idéale.

Dans un monde idéal, le signal d'entrée serait parfaitement transformé en un signal de sortie sans aucune perte. Toutefois, il n'existe aucun système dont l'efficacité à transformer l'énergie soit parfaitement efficace. En effet, il reste toujours une partie de cette transformation d'énergie qui est associée à d'autres variables que le signal de sortie. En d'autres termes, une partie du signal d'entrée est dissipée en énergie perdue sous l'influence des facteurs de bruit. Le rapport signal - bruit mesure la qualité de cette transformation d'énergie dans un système. C'est le rapport de l'énergie transformée associée aux variables de sortie Y sur l'énergie transformée par les variables de bruit Z .

La fonction idéale représente une transformation d'énergie sans aucune perte. Si cette fonction était parfaitement réalisable, il n'y aurait pas d'énergie disponible pour les sorties non-désirées telles les pertes de rendement, l'usure, les retours sur garanties, les pannes prématurées, etc. La mesure proposée par Taguchi pour mesurer la robustesse d'un produit est le rapport signal-bruit, noté SB. On peut le calculer dès la phase de design et non à la phase finale de fabrication où les faiblesses de design sont fixées et leurs effets encore inconnus. C'est un avantage important comparativement aux indicateurs déjà présentés.

Le rapport SB est un indice de robustesse car il mesure la qualité de la transformation de l'énergie des systèmes techniques. Cette qualité de la transformation d'énergie exprime le rapport de l'énergie transmise pour la fonction désirée sur l'énergie transmise aux autres fonctions. La figure (2.8) illustre le concept de signal-bruit pour un système de freinage.



$$SB = \frac{\text{Énergie transmise à la fonction désirée}}{\text{Énergie transmise à d'autres fonctions}}$$

**Figure 2.8 : Signal-bruit pour le système de freinage d'une voiture
d'après G. Tacuchi et al. (2000)**

Le signal d'entrée de ce procédé correspond à l'application des freins. La fonction désirée est évidemment l'arrêt de la voiture. La transformation d'énergie est affectée par différentes sources de bruit comme les conditions d'utilisation (condition de la route, la température, le trafic, etc.) l'usure des freins, la variabilité des matériaux et la variabilité des conditions normales d'opération lors de la fabrication. Une partie de l'énergie est dissipée à d'autres fonctions comme l'usure des freins, la vibration, les bruits sonores etc. Plus le rapport SB est grand, plus robuste sera le design.

Une des techniques les plus importantes pour améliorer le rapport SB est directement reliée à la capacité de l'ingénieur de choisir les valeurs nominales des paramètres critiques afin que la variabilité transmise par les variables de bruit soit minimale. Taguchi recommande l'utilisation du choix optimal des paramètres (*parameter design*) à l'aide de plans définis par des arrangements orthogonaux plutôt que par une méthode de tâtonnements d'essais et d'erreurs.

Le calcul du rapport signal-bruit SB dépend du type de valeur visée.

$$SB = \begin{cases} -10 \log_{10} \left(\frac{s^2}{\bar{y}^2} \right) & \text{valeur nominale visée} \\ -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) & \text{valeur minimale visée} \\ -10 \log_{10} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i^2} \right) & \text{valeur maximale visée} \end{cases} \quad (2.13)$$

Où s et \bar{y} sont respectivement l'écart type et la moyenne d'une série d'essais. Notons que le rapport SB est inversement proportionnel au coefficient de variation $\left(\frac{s}{\bar{y}} \right)$ dans le cas de valeur nominale visée. Le signe négatif permet de créer une variable de réponse qui est optimale avec le maximum de SB indépendamment du cas considéré. Le facteur 10 permet d'interpréter les résultats en décibels. L'utilisation des décibels et de la transformation logarithmique permet d'obtenir une mesure relative qui n'est pas affectée par l'unité de mesure utilisée pour les données. Par exemple, des mesures de température prise sur une échelle Celsius ou Fahrenheit donneront des résultats différents en termes de réponse, mais le pourcentage de changement sera le même.

Le rapport *SB* ne permet pas toujours de bien identifier les facteurs importants et peut contraindre les utilisateurs à procéder en deux étapes. L'analyse du rapport *SB* permettra 1) d'identifier les facteurs qui maximisent le rapport signal-bruit et 2) d'identifier les facteurs d'ajustement. Ces derniers sont ceux qui affectent la moyenne mais pas le rapport *SB* et servent à minimiser l'écart $\bar{y} - \tau$. L'utilisation du rapport signal-bruit *SB* est très controversée auprès de la communauté des statisticiens. Box (1988), Pignatiello et Ramberg (1991), Wheeler (1988) suggèrent d'étudier la moyenne et la variance séparément plutôt que l'inverse du coefficient de variation tel que proposé par Taguchi. La controverse sur ce point existe encore aujourd'hui. D'autres éléments de l'approche de Taguchi sont aussi au cœur de cette controverse : les hypothèses légères sur la présence et la nature des interactions entre les variables de contrôle *X* si on fait un choix judicieux de la variable de réponse, la méthode d'optimisation en deux phases, ainsi que l'utilisation des plans croisés.

Clément (2000) suggère que la controverse est plutôt le résultat d'un manque de compréhension sur la nature des activités de l'ingénieur et du statisticien. Taguchi s'intéresse aux activités de design et adapte les concepts statistiques pour réaliser la conception robuste. Les statisticiens sont, en général, très peu impliqués dans ces activités de design. Ils sont plutôt impliqués dans des activités et projets reliés à l'acquisition de connaissances, et leur principal produit est la méthodologie scientifique ainsi que les méthodes d'analyse pour interpréter les données.

2.2.7 L'analyse et l'évaluation des designs sélectionnés

Les essais sont effectués et les données sur la caractéristique qualité sont obtenues. La moyenne, la variance et le rapport signal-bruit sont calculés pour chaque essai du tableau associé aux facteurs contrôlables (Figure 2.9).

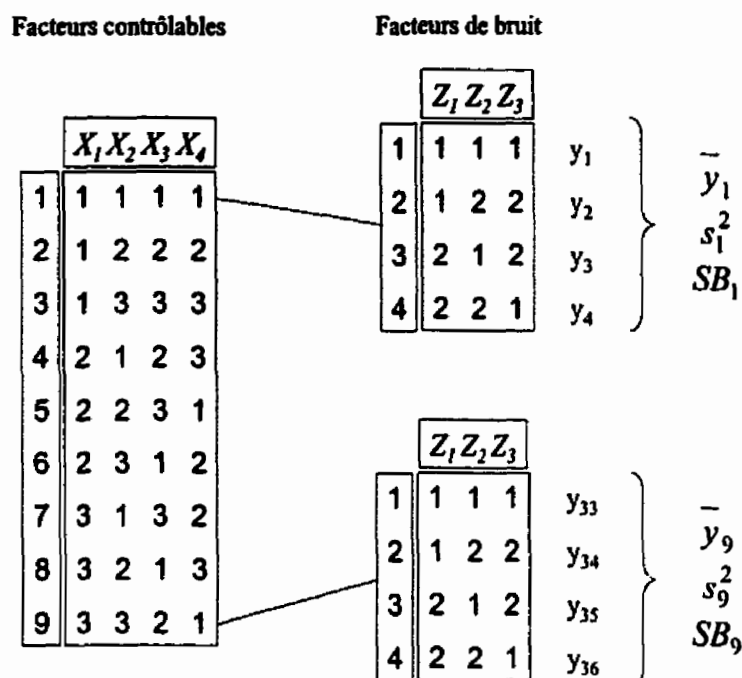


Figure 2.9 : Calcul du rapport signal-bruit

Il est important que l'expérience soit bien planifiée car la qualité de l'information recueillie dépend de la qualité du travail qui a été fait durant l'étape de planification. Il existe différentes méthodes pour interpréter les moyennes, les variances et les rapports. Une méthode simple consiste à construire des graphiques de réponse avec chacun des facteurs. Habituellement, ces graphiques sont fonction de la moyenne et du rapport SB. Pour chaque niveau de facteur, une moyenne et un rapport SB est calculé. Par exemple, la moyenne et le rapport associés au niveau 1 du facteur X_1 du plan croisé de la figure 2.9 sont égaux à

$$\bar{y}_{x_1} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3}{3}$$

$$SB_{x_1} = \frac{(SB)_1 + (SB)_2 + (SB)_3}{3}$$
(2.14)

Les calculs reposent sur la propriété voulant que les tableaux orthogonaux soient équilibrés, c'est-à-dire que chaque niveau apparait le même nombre de fois pour chaque facteur. On produit un graphique pour chacun des facteurs.

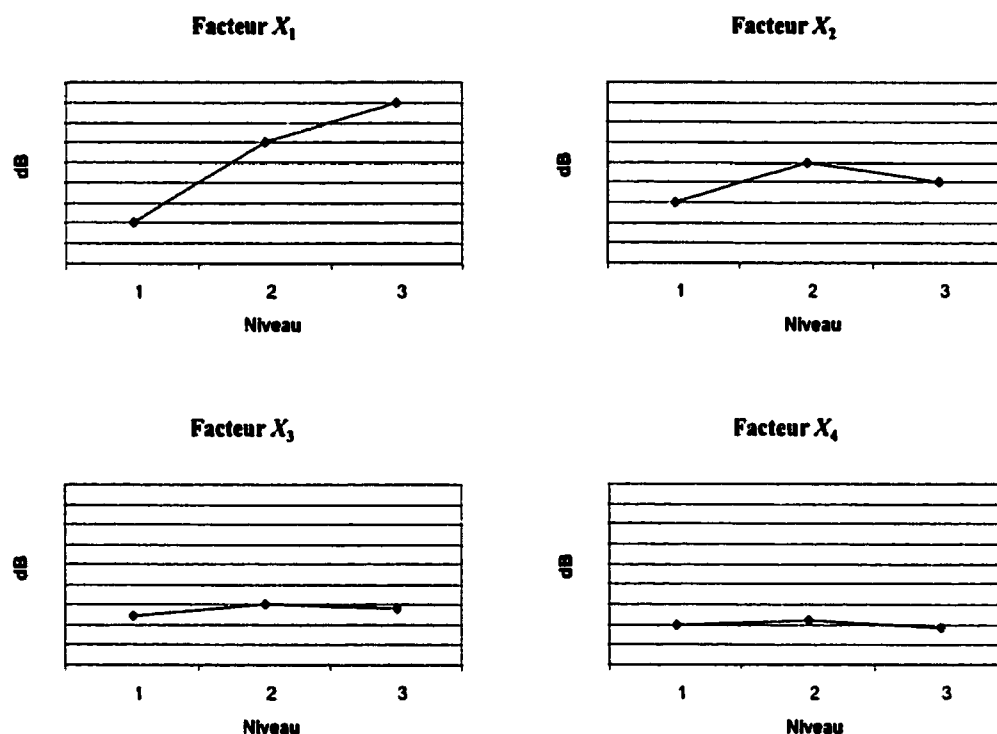


Figure 2.10 : Graphiques des rapports SB par facteur

En général, l'étude des graphiques des rapports permet d'identifier assez rapidement le ou les facteurs pour lesquels la différence entre les rapports est la plus significative. Les graphiques de la figure 2.10 révèlent, à échelle dB identique, que les facteurs X_1 et X_2 sont plus significatifs que les facteurs X_3 et X_4 en terme de différence relative. Il est clair que le niveau 3 du facteur X_1 et le niveau 2 du facteur X_2 sont les meilleurs choix de niveau pour ces deux facteurs. Pour ce qui est des facteurs X_3 et X_4 , l'étude des graphiques des moyennes peut être un bon moyen de sélectionner le niveau qui semble

être le meilleur. Dans le cas où même le graphique des moyennes ne permet pas de faire un choix éclairé, les coûts associés aux différents niveaux de ces facteurs peuvent parfois aider à prendre une décision.

Lorsque le niveau de chacun des facteurs a été sélectionné, il est possible d'obtenir une équation de prédiction à partir de la moyenne de chacun des essais. Dans le cas d'une étude comptant quatre facteurs par exemple, l'équation de prédiction serait

$$\hat{\mu} = \bar{Y} + (\bar{y}_{x_{1i}} - \bar{Y}) + (\bar{y}_{x_{2i}} - \bar{Y}) + (\bar{y}_{x_{3i}} - \bar{Y}) + (\bar{y}_{x_{4i}} - \bar{Y}) \quad (2.15)$$

où \bar{Y} est la moyenne de toutes observations et $\bar{y}_{x_{1i}}$, $\bar{y}_{x_{2i}}$, $\bar{y}_{x_{3i}}$ et $\bar{y}_{x_{4i}}$ correspondent aux moyennes des facteurs X_1, X_2, X_3 et X_4 au niveau i , i étant le niveau optimal du facteur.

La méthode par excellence est l'analyse de variance (ANOVA). Elle est toutefois moins conviviale que les graphiques. Elle permet d'identifier, à l'aide d'un test de Fisher, les facteurs qui sont statistiquement significatifs. Cette méthode est présentée plus en détails dans la prochaine section qui traite de la phase de design des tolérances.

Peu importe la méthode d'analyse, il est important d'effectuer des essais de confirmation avec les niveaux sélectionnés qui ont été identifiés comme étant les plus appropriés. Si les résultats des essais de confirmation se rapprochent du résultat obtenu à l'aide de l'équation de prédiction, alors il est possible de fixer les niveaux sélectionnés comme valeurs optimales. Dans le cas contraire, l'analyse devra être poussée un peu plus loin afin de voir ce qui cause cette discordance. Ceci peut être associé par un facteur contrôlable qui n'a pas été inclus dans l'étude ou encore à une interaction entre deux facteurs.

On trouvera dans Clément (2000), un exemple détaillé illustrant le processus de conception robuste.

2.3 Design des tolérances

Le design des tolérances est le processus par lequel on détermine les tolérances autour des valeurs optimales (τ) sélectionnées durant la phase de conception paramétrique. L'équipe de conception cherche à répondre à la question suivante : « quelles sont les tolérances permises autour des valeurs optimales des paramètres et quel est l'impact de ces dernières sur les caractéristiques de la qualité ? ». L'objectif est d'identifier les paramètres pour lesquels les tolérances doivent être resserrées et celles pour lesquels les tolérances peuvent être relâchées. Il existe plusieurs méthodes numériques et outils pour répondre à la question. Dans la littérature, il est question d'analyse du pire cas, d'analyse statistique des tolérances, de transmission de la variabilité ou encore d'allocation des tolérances. Les chapitres 3 à 5 aborderont ces méthodes d'analyses dans différents contextes. Taguchi propose une approche d'analyse des tolérances plus expérimentale qui repose sur l'analyse de variance (ANOVA) et la fonction de perte.

Souvent, l'assignation des tolérances est faite par convention plutôt que par une étude systématique. Le design des tolérances est en fait un compromis, entre les pertes que le client subit à cause d'une mauvaise performance et l'augmentation des coûts de production, associé à un certain niveau de qualité. Des tolérances trop étroites augmentent les coûts de production alors que des tolérances trop larges risquent de fournir un produit de moins bonne qualité.

La conception des tolérances repose sur l'établissement d'une relation qui existe entre la variabilité des variables d'entrée d'un système et la variabilité d'une caractéristique de la qualité en sortie. On cherche à savoir quelle est la contribution de chaque variable d'entrée sur la variabilité associée à la variable de sortie. Les variables pour lesquelles

la contribution est la plus grande sont celles pour lesquelles les tolérances devront être resserrées.

2.3.1 Niveaux des facteurs et du tableau orthogonal

Comme lors de l'étape de design des paramètres, un ensemble de facteur est étudié simultanément à l'aide d'un tableau orthogonal. Puisque l'on cherche à déterminer les tolérances autour des valeurs nominales, les facteurs étudiés dans cette phase proviendront de l'ensemble des facteurs contrôlables de la phase paramétrique. Le tableau orthogonal sera choisi en fonction du nombre de facteurs et de niveaux pour chacun d'eux.

Les niveaux des facteurs correspondent aux tolérances que l'on désire étudier. Le choix des niveaux pour chacun des facteurs pour être fait de deux façons : en utilisant l'écart-type associé au facteur ou encore en utilisant des limites de spécifications. Le tableau 2.2 présente les niveaux des facteurs proposé par Taguchi pour les deux méthodes dans une étude à deux et à trois niveaux.

Tableau 2.2 : Niveaux des facteurs pour les tolérances

Méthode	Nombre de niveaux	Niveau des facteurs		
		1	2	3
Écart-type	2	$\tau - 1\sigma$	$\tau + 1\sigma$	---
	3	$\tau - \sqrt{3/2}\sigma$	τ	$\tau + \sqrt{3/2}\sigma$
Limites de spécification	2	Limite inférieure	Limite supérieure	---
	3	Limite inférieure	τ	Limite supérieure

Les valeurs 1 et $\sqrt{3/2}$ devant l'écart-type pour une étude à trois niveaux s'expliquent de la façon suivante. Pour une étude à trois niveaux, on suppose que la variable X ne peut prendre que les valeurs $\tau - T$, τ et $\tau + T$, avec la même probabilité, où T correspond à une déviation exprimée en écart-type.

La variance associée à cette variable est égale à :

$$\sigma^2 = \frac{((\tau - T) - \tau)^2 + (\tau - \tau)^2 + ((\tau + T) - \tau)^2}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{2(T)^2}{3} \quad (2.16)$$

donc

$$T = \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma$$

De la même façon, on obtient 1σ pour une étude à deux niveaux par facteur. L'utilisation des limites de spécification ne requière pas de connaissance sur la variabilité des variables d'entrée. Cependant, la variabilité totale qui sera observée risque de ne pas être représentative de ce qui se passe en réalité. De plus, il faut faire l'hypothèse que les limites de tolérances seront satisfaites et que la variation d'une caractéristique de la qualité est réaliste. Dans le cas où les limites de spécification ne sont pas satisfaites, il est possible que de mauvaises décisions soient prises en ce qui concerne les variables pour lesquelles les tolérances doivent être modifiées.

2.3.2 Analyse de la variance et de la fonction de perte

Peu importe l'approche utilisée pour l'assignation des niveaux, l'analyse des données reste la même. Après la collecte de données, l'ensemble des données est résumé dans

une table d'analyse de variance. Pour chaque colonne du tableau orthogonal, on retrouve des degrés de liberté (df), une somme de carrés (SS), une somme des carrées moyen (MS) et une statistique associée à un test de Fisher (test F). Les deux dernières lignes de la table d'ANOVA correspondent à ce qui est attribuable à l'erreur et le total. Le nombre de degré de liberté de chaque facteur est égal à (nombre de niveau -1) et le nombre de degré de liberté du total est égal au nombre d'observation totale moins 1 ($N-1$). La différence entre les degrés associés au total et ceux associés aux facteurs donne les degrés de liberté associés à l'erreur. Un exemple de table d'ANOVA est présenté à la figure 2.11 pour une étude à 7 facteurs.

Tableau 2.3 : Table d'ANOVA

Source de variation	SS	df	MS	F
X_1	SS_{X1}	df_{X1}	MS_{X1}	$MS_{X1} / MS_{\text{erreur}}$
X_2	SS_{X2}	df_{X2}	MS_{X2}	$MS_{X2} / MS_{\text{erreur}}$
X_3	SS_{X3}	df_{X3}	MS_{X3}	$MS_{X3} / MS_{\text{erreur}}$
X_4	SS_{X4}	df_{X4}	MS_{X4}	$MS_{X4} / MS_{\text{erreur}}$
X_5	SS_{X5}	df_{X5}	MS_{X5}	$MS_{X5} / MS_{\text{erreur}}$
X_6	SS_{X6}	df_{X6}	MS_{X6}	$MS_{X6} / MS_{\text{erreur}}$
X_7	SS_{X7}	df_{X7}	MS_{X7}	$MS_{X7} / MS_{\text{erreur}}$
Erreur	SS_{erreur}	Soustraction	MS_{erreur}	
Total	SS_{total}	$N-1$	MS_{total}	

Chaque valeur de F est comparée à une valeur provenant de la table d'une loi de Fisher. Si cette valeur de F est supérieure à celle de la table, alors on conclut que ce facteur est significatif et qu'il existe une différence significative entre les niveaux de ce facteur.

En plus de pouvoir identifier les facteurs significatifs, l'information provenant de la table d'ANOVA nous permet de calculer le pourcentage de contribution de chacun des facteurs et celui associé à l'erreur. Cette contribution est calculée à l'aide de l'équation :

$$\% \text{ Contribution} = 100 * \frac{SS_{\text{facteur ou erreur}}}{SS_{\text{total}}} \quad (2.17)$$

Les facteurs ayant la contribution la plus grande sont ceux sur lesquels il faudra travailler à resserrer les tolérances. Le pourcentage de contribution peut aussi être utilisé pour estimer la déviation quadratique moyenne (*MSD*) pour chaque facteur.

$$MSD_{\text{facteur}} = MSD_{\text{total}} * \left(\frac{\% \text{ Contribution}}{100} \right) \quad (2.18)$$

où $MSD_{\text{total}} (\sigma^2 + (\mu - \tau)^2)$ est la déviation quadratique moyenne totale de toutes les données.

En utilisant la formule de la fonction de perte quadratique moyenne avec chacune des valeurs de *MSD*, la perte totale et la perte associée à chaque facteur peuvent être calculées.

2.3.3 Modification des tolérances

Le pourcentage de contribution et la perte moyenne associés à chaque facteur permet de bien identifier les facteurs pour lesquels les tolérances doivent être redéfinies (resserrés ou relâchés). La façon dont les tolérances seront redéfinies repose principalement sur l'étude du procédé de fabrication, des matériaux utilisés et tout ce qui touche l'ingénierie et les technologies. Les méthodes statistiques auront contribué à faire des choix rationnels.

2.4 Conclusion

Les bénéfices de la méthodologie de Taguchi sont grands : produit (procédé) robuste aux sources de variation, amélioration de la qualité, augmentation de la satisfaction des clients. Bien que la philosophie de Taguchi repose sur des outils relativement simples à comprendre, l'implantation n'est pas nécessairement facile. En général, les projets ne peuvent se réaliser que par une équipe appuyée par une volonté organisationnelle. Le déficit de l'approche de Taguchi ne réside pas au niveau de sa compréhension, mais plutôt au niveau de sa mise en application.

CHAPITRE 3

ANALYSE DES TOLÉRANCES AVEC LA MÉTHODE DU PIRE CAS

Ce chapitre présente une première méthode pour analyser les tolérances. La généralité de cette méthode dans différents contextes est illustrée ainsi qu'à des exemples pratiques d'application. Nous exposons les avantages et les inconvénients de cette méthode qui sera comparée avec d'autres méthodes dans les autres chapitres.

3.1 Le problème

On veut assembler un ensemble de composants de façon à ce que le produit final satisfasse à une certaine caractéristique de la qualité. Il est possible de définir une relation entre les composants de l'assemblage et la caractéristique qualité Y :

$$Y = g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \quad (3.1)$$

La fonction g qui relie la variable Y aux variables X_i peut être de deux formes : linéaire ou non linéaire. Les figures 3.1 et 3.2 présentent deux exemples d'assemblage : un cas linéaire et un cas non linéaire (Crevelling, 1997).

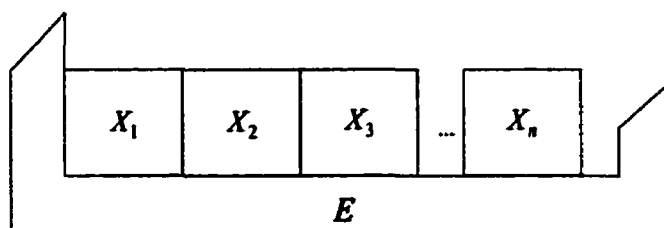


Figure 3.1 : Exemple d'assemblage d'un cas linéaire

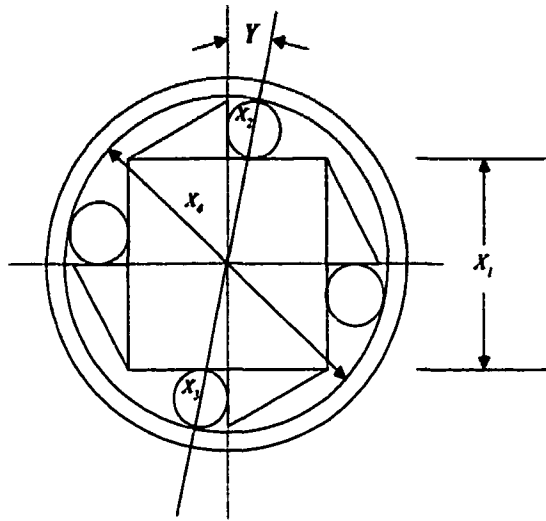


Figure 3.2 : Exemple d'assemblage d'un cas non linéaire

Les relations, linéaire et non linéaire, associées aux figures 3.1 et 3.2 s'expriment sous la forme :

$$Y = E - \sum_i X_i$$

$$Y = \cos^{-1} \left[\frac{X_1 + \frac{X_2 + X_3}{2}}{X_4 - \frac{X_2 + X_3}{2}} \right] \quad (3.2)$$

Les variables X_i correspondent aux composants et varient selon une distribution dans un intervalle de tolérances $(\tau_{X_i} - T_{X_i}, \tau_{X_i} + T_{X_i})$ où τ_{X_i} et T_{X_i} correspondent à la valeur nominale et à la tolérance de X_i respectivement. La variable E est aussi un composant appelé enveloppe d'insertion. Comme pour les X_i , E varie selon une certaine distribution dans l'intervalle de tolérances $(\tau_E - T_E, \tau_E + T_E)$ où τ_E et T_E correspondent à la valeur nominale et à la tolérance de E .

Notons que toutes les variables X_i , E , les valeurs nominales et les tolérances sont positives. De plus, il existe un lien direct entre les tolérances et les coûts. On peut supposer une relation inversement proportionnelle entre la tolérance T et le coût de fabrication C tel qu'illustré à la figure 3.3.

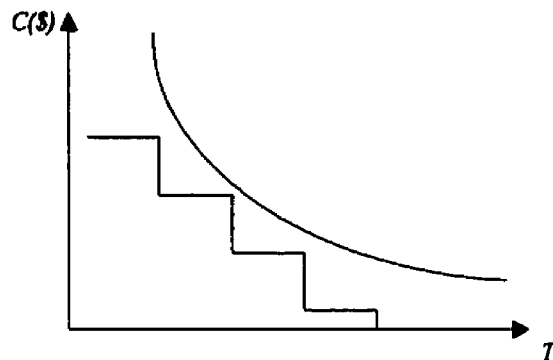


Figure 3.3 : Relation entre le coût et les tolérances

3.2 Calcul des tolérances dans un cas d'empilage

3.2.1 Généralité

La caractéristique étudiée est le vide, noté V .

$$V = E - \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.3)$$

Le premier problème est le calcul de l'intervalle de tolérance de V à partir de l'information sur E et X_i . Il faut ensuite vérifier si ces valeurs respectent la valeur minimale et la valeur maximale préétablies sur V . Le deuxième problème, dit allocation des tolérances, est la révision des valeurs nominales ou les tolérances des composants

dans le but de satisfaire les tolérances spécifiées sur V . La figure 3.4 présente l'espace de vide à l'étude.

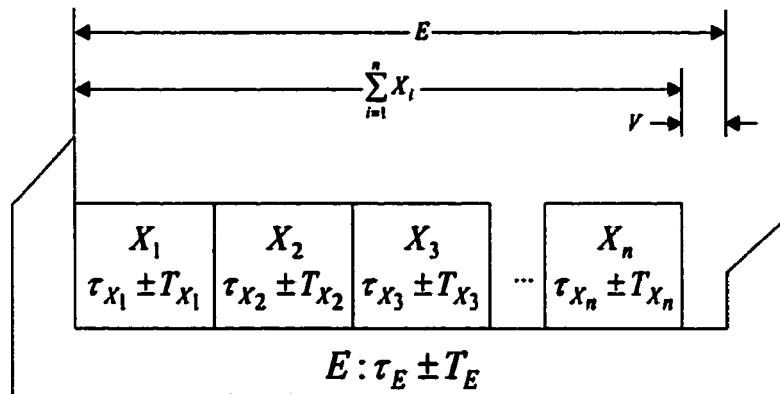


Figure 3.4 : Identification de l'espace de vide sur un assemblage

On veut déterminer l'intervalle de tolérance de V . La méthode traditionnelle dite la méthode du pire cas repose sur une hypothèse pessimiste. On cherche à déterminer la valeur minimale (V_{\min}) et la valeur maximale (V_{\max}) de V .

$$V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$$

Nous avons que

$$\begin{aligned}
 V_{\min} &= \min V = \min \left(E - \sum_{i=1}^n X_i \right) \\
 &= \min E - \max \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\
 &= (\tau_E - T_E) - \sum_{i=1}^n (\tau_{X_i} + T_{X_i}) \\
 &= \left(\tau_E - \sum_{i=1}^n \tau_{X_i} \right) - \left(T_E + \sum_{i=1}^n T_{X_i} \right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Posons

$$\begin{aligned}\tau_V &= \tau_E - \sum_{i=1}^n \tau_{X_i} \\ T_V &= T_E + \sum_{i=1}^n T_{X_i}\end{aligned}\tag{3.5}$$

Alors,

$$V_{\min} = \min V = \tau_V - T_V\tag{3.6}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned}V_{\max} &= \max V = \max \left(E - \sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \max E - \min \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= (\tau_E + T_E) - \sum_{i=1}^n (\tau_{X_i} - T_{X_i}) \\ &= \left(\tau_E - \sum_{i=1}^n \tau_{X_i} \right) + \left(T_E + \sum_{i=1}^n T_{X_i} \right) \\ &= \tau_V + T_V\end{aligned}\tag{3.7}$$

L'intervalle de tolérance ainsi calculé $(\tau_V - T_V, \tau_V + T_V)$ doit être comparé avec l'intervalle de tolérance désirée (V_L^d, V_U^d) où $V_U^d > V_L^d \geq 0$. Il y a plusieurs possibilités et actions qui résultent de cette comparaison.

3.2.2 Résultats et interventions possibles

Cas (a)

Les exigences sur V sont satisfaites avec les tolérances initiales sur les composants X_i et E . La situation peut être jugée satisfaisante et aucun ajustement des tolérances initiales ne sera fait.



Figure 3.5 : Exigences sur V satisfaites

Cas (b)

Comme en (a), les exigences sur V sont satisfaites. Cependant, il est possible d'élargir l'intervalle (V_{\min}, V_{\max}) tout en restant à l'intérieur des exigences. Cela permet d'abaisser les coûts en choisissant des matériaux et des procédés de fabrication moins coûteux car on peut augmenter les tolérances T_{X_i} et T_E . Ceci va amener l'équipe de conception à se questionner sur l'évaluation de la contribution des composants X_i et E à la variabilité de V . Cette connaissance conduit à la révision des tolérances initiales.

Cas (c)

L'intervalle de tolérance calculé ne se situe pas à l'intérieur de l'intervalle désiré pour l'une ou l'autre des limites V_L ou V_U .

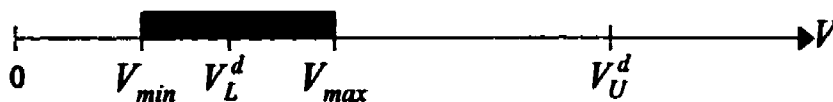


Figure 3.6 : Exigences sur V non satisfaites

On peut même imaginer le cas où $V_{\min} < 0$ ce qui conduit à une impossibilité d'assemblage. Pour les possibilités (b) et (c), il y a deux solutions. La première solution est de réviser les exigences initiales (V_L^d, V_U^d) afin que (V_{\min}, V_{\max}) soit inclus dans (V_L^d, V_U^d) . Cette solution, quoique possible, n'est pas souvent appliquée car elle repose sur l'idée que les concepteurs ont des exigences sur V qui sont quelque peu arbitraires. La deuxième solution est la plus plausible : réviser les tolérances initiales avec un choix de matériaux et des procédés de fabrication plus performants. On peut aussi réviser les valeurs nominales initiales lorsqu'il s'agit d'une correction permettant de resserrer l'intervalle de tolérance calculé pour avoir une meilleure adéquation avec les exigences. Dans ce dernier cas, la longueur de l'intervalle de tolérance calculée est plus petite que la longueur de l'intervalle de tolérance désirée.

3.3 Généralisation des résultats : Cas linéaire général

La fonction g qui relie la variable dépendante Y aux variables indépendantes X_i ($Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$) peut être écrite sous la forme :

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i \quad (3.8)$$

où $0 < a_i \leq X_i \leq b_i$ et $\beta_i \neq 0 \in \mathbb{R}$. La valeur de β_i est en fait la valeur de la dérivée partielle $\left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)$ appelée aussi la sensibilité du composant sur l'assemblage. Dans un cas d'assemblage où les composants sont empilés, comme dans le premier exemple, les β_i prennent les valeurs -1 et 1 et elles sont constantes dans l'intervalle de variation des X_i .

On veut calculer l'intervalle de variation de Y , c'est-à-dire déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de Y .

$$Y_{\min} \leq Y \leq Y_{\max}$$

Il faut donc trouver Y_{\min} et Y_{\max} en fonction des limites de variation (a_i, b_i) des X_i et des coefficients β_i . Il n'est pas possible d'utiliser la méthode du gradient car la condition nécessaire

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \beta_i = 0$$

nous conduit à une contradiction de notre hypothèse voulant que tous les β_i soient différents de zéro.

Le minimum (maximum) de Y est obtenu lorsque les valeurs des X_i sont situées à leurs limites. Ce résultat est géométriquement immédiat si l'on considère que

$$\beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i \tag{3.9}$$

est l'équation d'un plan dans l'espace en k dimensions.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \sum_i |\beta_i| \operatorname{SGN}(\beta_i) X_i \\ &= \beta_0 - \sum_{\beta_i < 0} |\beta_i| X_i + \sum_{\beta_i > 0} |\beta_i| X_i \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $SGN(u)$ est la fonction signe définie par :

$$SGN(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \\ -1 & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

La valeur minimale de Y (Y_{\min}) est égale à

$$\begin{aligned} \text{Min } Y &= \beta_0 + \text{Min} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i X_i \right) \\ &= \beta_0 + \sum_{\beta_i > 0} |\beta_i| SGN(\beta_i) \min(X_i) \\ &\quad + \sum_{\beta_i < 0} |\beta_i| SGN(\beta_i) \max(X_i) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} Y_{\min} &= \beta_0 + \sum_{\beta_i > 0} |\beta_i| \min(X_i) - \sum_{\beta_i < 0} |\beta_i| \max(X_i) \\ &= \beta_0 + \sum_{\beta_i > 0} |\beta_i| (\tau_{X_i} - T_{X_i}) - \sum_{\beta_i < 0} |\beta_i| (\tau_{X_i} + T_{X_i}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

D'une manière analogue,

$$\begin{aligned} Y_{\max} &= \beta_0 + \sum_{\beta_i > 0} |\beta_i| \max(X_i) - \sum_{\beta_i < 0} |\beta_i| \min(X_i) \\ &= \beta_0 + \sum_{\beta_i > 0} |\beta_i| (\tau_{X_i} + T_{X_i}) - \sum_{\beta_i < 0} |\beta_i| (\tau_{X_i} - T_{X_i}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Une comparaison des équations (3.11) et (3.12) avec les équations (3.4) et (3.7) permet de voir le lien entre les deux ensembles de formules. En effet, le premier terme des

équations (3.11) et (3.12) correspond à l'enveloppe E et le deuxième terme aux variables X_i des équations (3.4) et (3.7).

Cette notation générale ne se limite pas aux cas où la fonction est linéaire. Il est possible d'utiliser la même notion dans le cas d'une fonction non linéaire. La différence se situera au niveau de l'interprétation des valeurs de β_i .

3.4 Calcul des tolérances dans un cas non linéaire

3.4.1 Généralité

Dans le cas non linéaire, la fonction g reliant Y aux variables X_i peut être approchée par une fonction linéaire par un développement de Taylor du premier ordre autour des valeurs nominales τ_{X_i} .

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \approx \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i (X_i - \tau_{X_i}) \quad (3.13)$$

où $\beta_0 = g(\tau_{X_1}, \tau_{X_2}, \dots, \tau_{X_n})$, $\beta_i = \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{\bar{x}}$ et $\bar{x} = (\tau_{X_1}, \tau_{X_2}, \dots, \tau_{X_n})$. Les β_i ne sont pas constants comme dans le cas linéaire mais peuvent varier en fonction des points d'évaluation τ_{X_i} .

L'équation (3.13) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \sum_{\beta_i} |\beta_i| \operatorname{SGN}(\beta_i) (X_i - \tau_{X_i}) \\ &= \beta_0 - \sum_{\beta_i < 0} |\beta_i| (X_i - \tau_{X_i}) + \sum_{\beta_i > 0} |\beta_i| (X_i - \tau_{X_i}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pour calculer la valeur nominale τ_Y^c de Y , il suffit de remplacer les valeurs nominales des composants dans la fonction. Cette valeur correspond à β_0 de l'équation (3.14).

Le calcul de la valeur de la tolérance de Y passe par le calcul des dérivées partielles de la fonction g . Les dérivées partielles étant calculées, il est possible de calculer la tolérance de l'assemblage à l'aide de la valeur de sensibilité de chacun des composants.

$$T_r^c = \left| \frac{\partial g}{\partial X_1} \right| T_{x_1} + \left| \frac{\partial g}{\partial X_2} \right| T_{x_2} + \dots + \left| \frac{\partial g}{\partial X_n} \right| T_{x_n} \quad (3.15)$$

Il est possible de calculer la limite minimale et maximale que peut prendre Y (Y_{\min}, Y_{\max}). Puisque nous sommes dans un cas non linéaire, il est possible que les composants dont la tolérance est symétrique par rapport à une valeur nominale n'entraîne pas nécessairement une tolérance symétrique autour du point milieu de l'intervalle calculé pour l'assemblage.

Lors du calcul de la valeur minimale et de la valeur maximale de Y , la valeur prise par le composant dépendra du signe de sa dérivée partielle. Une dérivée partielle positive pour X_i implique que la valeur minimale ($\tau_{x_i} - T_{x_i}$) de X_i sera prise pour évaluer la valeur minimale de Y . De même, la valeur maximale ($\tau_{x_i} + T_{x_i}$) sera prise dans le calcul de la valeur maximale de Y . Dans le cas où la dérivée partielle est négative, la valeur minimale (maximale) du composant donnera la valeur maximale (minimale) de Y .

Notons que la valeur minimale et la valeur maximale de Y peut exceptionnellement s'obtenir par un raisonnement direct sur la fonction g . En général, la fonction non linéaire est suffisamment compliquée pour qu'une analyse directe basée sur son

comportement ne puisse être réalisée en pratique. Par contre, l'utilisation de l'approximation du premier ordre est facile et donnera des résultats satisfaisants.

Lorsque les limites calculées ne se retrouvent pas à l'intérieur des limites désirées alors il faut intervenir. Comme pour le cas linéaire, la révision des limites désirées n'est pas souvent appliquée et cette solution est souvent rejetée. Il reste essentiellement deux méthodes pour remédier à cette situation : réviser la valeur nominale ou réviser la tolérance de l'un ou plusieurs composants.

Notons pour fin de référence les formules permettant d'obtenir une approximation des valeurs importantes de Y : valeur nominale (τ_Y^c), tolérance (T_Y^c), valeur minimale (Y_{\min}) et valeur maximale (Y_{\max}).

$$\tau_Y^c = \beta_0 = g(\tau_{X_1}^a, \tau_{X_2}^a, \dots, \tau_{X_n}^a) \quad (3.16)$$

$$T_Y^c = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| T_{X_i}^a \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} Y_{\min} &= \beta_0 + \sum_{\frac{\partial g}{\partial X_i} > 0} \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| (-T_{X_i}^a) - \sum_{\frac{\partial g}{\partial X_i} < 0} \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| (T_{X_i}^a) \\ &= \tau_Y^c - T_Y^c \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} Y_{\max} &= \beta_0 + \sum_{\frac{\partial g}{\partial X_i} > 0} \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| (T_{X_i}^a) - \sum_{\frac{\partial g}{\partial X_i} < 0} \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| (-T_{X_i}^a) \\ &= \tau_Y^c + T_Y^c \end{aligned} \quad (3.19)$$

où $\tau_{X_i}^a$ et $T_{X_i}^a$ correspondent à la valeur nominale actuelle et à la tolérance actuelle de X_i .

Les formules (3.16) à (3.19), qui constituent de bonnes approximations, sont applicables dans tous les cas et résument l'application du principe du *pire cas*.

3.4.2 Révision des valeurs nominales initiales

Examinons la première solution, soit l'ajustement des valeurs nominales actuelles $\tau_{X_i}^a$ des composants par de nouvelles valeurs nominales $\tau_{X_i}^n$. L'écart entre la valeur nominale désirée τ_Y^d et le point milieu de l'intervalle calculé est :

$$\Delta Y = \tau_Y^d - \frac{(Y_{\max}^c + Y_{\min}^c)}{2} \quad (3.20)$$

Le développement de Taylor de Y donne

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \Delta X_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \Delta X_i \Delta X_j + \dots \quad (3.21)$$

Si on retient seulement l'approximation du premier ordre, nous avons la relation suivante entre la variation ΔY de la variable dépendante Y et les variations ΔX_i des variables indépendantes X_i :

$$\Delta Y = \frac{\partial g}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial g}{\partial X_2} \Delta X_2 + \dots + \frac{\partial g}{\partial X_n} \Delta X_n \quad (3.22)$$

L'équation (3.22) peut aussi s'écrire :

$$SGN(\Delta Y) |\Delta Y| = \sum_{i=1}^n SGN \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right) \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| \Delta X_i \quad (3.23)$$

En multipliant l'équation (3.23) par $SGN(\Delta Y)$ on obtient alors :

$$|\Delta Y| = \sum_{i=1}^n SGN(\Delta Y) SGN\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right) \left|\frac{\partial g}{\partial X_i}\right| \Delta X_i \quad (3.24)$$

On se propose de remplacer les valeurs nominales actuelles $(\tau_{X_i}^a)$ par de nouvelles $(\tau_{X_i}^n)$ définies par

$$\tau_{X_i}^n = \tau_{X_i}^a + \delta X_i \quad (3.25)$$

où δX_i est une perturbation. On propose

$$\delta X_i = SGN(\Delta Y) SGN\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right) f_i T_{X_i} \quad (3.26)$$

où

$$f_i = \begin{cases} f & i \in I \\ 0 & i \in I' \end{cases}$$

et $0 < f < 1$, $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ est un sous ensemble et $I' = \{1, 2, \dots, n\} - I$. Si on remplace ΔX_i par δX_i dans l'équation (3.24), on obtient

$$\begin{aligned} |\Delta Y| &= \sum_{i \in I} SGN(\Delta Y) SGN\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right) \left|\frac{\partial g}{\partial X_i}\right| SGN(\Delta Y) SGN\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right) f T_{X_i} \\ &= \sum_{i \in I} \left|\frac{\partial g}{\partial X_i}\right| f T_{X_i} \end{aligned} \quad (3.28)$$

La fraction f sera alors calculée par :

$$f = \frac{|\Delta Y|}{\sum_{i \in I} \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| T_{X_i}} \quad (3.28)$$

En remplaçant la valeur de f dans l'équation (3.26) on obtient les valeurs de δX_i pour les composants pour lesquels il est possible de changer la valeur nominale. Il suffit ensuite de remplacer la valeur de δX_i dans l'équation (3.25) pour obtenir les nouvelles valeurs nominales.

Les nouvelles valeurs nominales étant calculées, il est possible de recalculer la limite inférieure (Y_{\min}) et la limite supérieure (Y_{\max}) de Y . Ces nouvelles limites peuvent ensuite être comparées aux limites désirées.

Le processus d'obtention des nouvelles valeurs nominales est un processus itératif. Plusieurs itérations peuvent être nécessaires pour en arriver à un intervalle de tolérance calculé qui se situe à l'intérieur de l'intervalle de tolérance désiré. Cette méthode de recalcul des valeurs nominales a pour avantage d'être la plus économique de toutes les méthodes. Toutefois, elle ne donnera pas des résultats satisfaisants si la tolérance calculée est supérieure à la tolérance désirée.

3.4.3 Révision des tolérances initiales

Une autre solution pour remédier au problème de l'intervalle calculé ne se situe pas dans l'intervalle désiré est de réduire les tolérances T de un ou plusieurs des composants.

On se propose de remplacer les tolérances actuelles $(T_{X_i}^a)$ par de nouvelles $(T_{X_i}^n)$ définies par

$$T_{X_i}^n = \alpha_i T_{X_i}^a \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.29)$$

où α_i est égal à 1 pour les $i \in I'$ et égal à α pour les $i \in I$ avec $0 < \alpha < 1$.

La première étape consiste à trouver le point milieu de l'intervalle calculé $(\tau_Y^{Intervalle})$.

$$\tau_Y^{Intervalle} = \frac{(Y_{\max}^c + Y_{\min}^c)}{2} \quad (3.30)$$

On cherche ensuite à trouver la différence entre ce point milieu de l'intervalle et la limite de Y_{\min} ou Y_{\max} , noté $Y_{\min(\max)}^d$, qui n'a pas été respectée. Cette différence deviendra la tolérance que l'on souhaitera respecter.

$$T_Y^{Diff} = |\tau_Y^{Intervalle} - Y_{\min(\max)}^d| \quad (3.31)$$

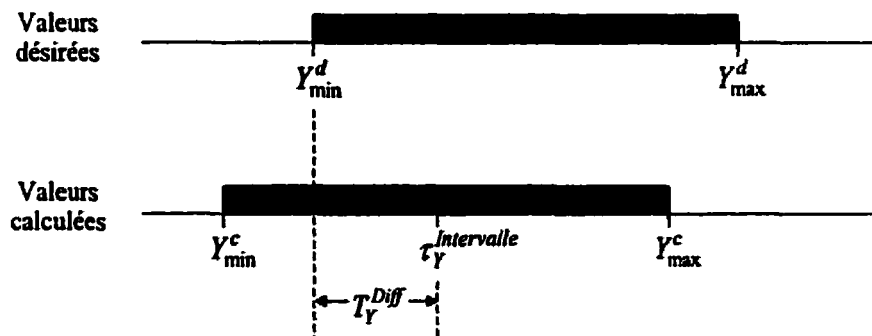


Figure 3.7 : Exemple de calcul de T_Y^{Diff}

Comme pour la tolérance calculée (T_Y^c), cette tolérance peut être écrite en fonction des tolérances associées aux composants sur lesquels il est possible d'apporter une modification ($\alpha_i = \alpha$) et ceux pour lesquels une modification n'est pas souhaitable ($\alpha_i = 1$).

$$T_Y^{Diff} = \sum_{i \in I} \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| \alpha T_{X_i} + \sum_{i \in I'} \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| T_{X_i} \quad (3.32)$$

La fraction α est calculée par :

$$\alpha = \frac{T_Y^{Diff} - \sum_{i \in I'} \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| T_{X_i}}{\sum_{i \in I} \left| \frac{\partial g}{\partial X_i} \right| T_{X_i}} \quad (3.33)$$

La valeur α étant déterminée, on calcule les nouvelles tolérances à l'aide de l'équation (3.29) et l'on reprend le calcul de la limite inférieure et supérieure de Y . Ces nouvelles limites sont ensuite comparées aux limites désirées.

3.5 Exemples d'application

3.5.1 Étude d'un cas linéaire

Reprenons l'exemple de la figure 3.1 représentant un exemple d'assemblage dont la relation entre la variable Y et les variables X_i est linéaire. La valeur nominale et la tolérance de chacun des composants sont présentées dans la figure 3.8.

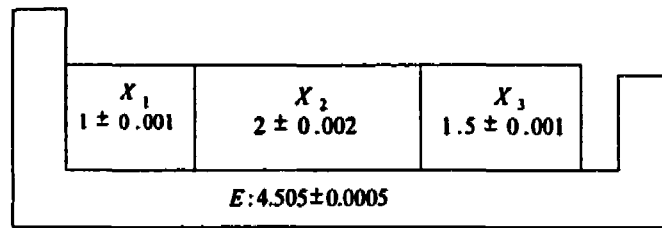


Figure 3.8 : Valeurs nominales et tolérances des composants de l'assemblage linéaire

Les limites de spécifications V_L et V_U ont été fixées à 0.000 et 0.008 respectivement. On veut pouvoir comparer ces deux limites aux valeurs de V_{\min} et V_{\max} associées à cet assemblage.

$$\begin{aligned}
 V_{\min} &= \left(\tau_E - \sum_{i=1}^3 \tau_{X_i} \right) - \left(T_E + \sum_{i=1}^3 T_{X_i} \right) \\
 &= (4.505 - 4.500) - (0.0005 + 0.004) \\
 &= 0.005 - 0.0045 \\
 &= 0.0005
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\max} &= \left(\tau_E - \sum_{i=1}^3 \tau_{X_i} \right) + \left(T_E + \sum_{i=1}^3 T_{X_i} \right) \\
 &= (4.505 - 4.500) + (0.0005 + 0.004) \\
 &= 0.005 + 0.0045 \\
 &= 0.0095
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

La limite supérieure de l'intervalle de tolérance calculé (0.005, 0.0095) est plus grande que la limite supérieure de spécification de V , soit 0.008. Différentes solutions sont envisageables pour remédier à cette situation. Puisque les concepteurs ne veulent pas modifier les limites de spécifications de V , l'intervention doit se faire au niveau des valeurs nominales ou des tolérances des composants. Bien qu'il soit moins coûteux d'intervenir sur les valeurs nominales, les concepteurs décident de modifier les tolérances de certains composants.

Le choix des composants pour lesquels la tolérance sera modifiée dépend de plusieurs facteurs dont la possibilité à pouvoir effectuer une révision ou encore les coûts associés à une telle modification. Supposons que seules les tolérances des composants X_2 et X_3 peuvent être révisées. Le calcul de $\tau_Y^{Intervalle}$ et T_Y^{Diff} nous donne

$$\begin{aligned}\tau_Y^{Intervalle} &= \frac{0.0095 + 0.0005}{2} \\ &= 0.005\end{aligned}\quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}T_Y^{Diff} &= |0.005 - 0.008| \\ &= 0.003\end{aligned}\quad (3.37)$$

La fraction α est donc égale à

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{0.003 - (0.0005 + 0.0010)}{(1)0.002 + (1)0.001} \\ &= 0.5\end{aligned}\quad (3.38)$$

Les nouvelles tolérances de X_2 et X_3 sont égales à

$$\begin{aligned}T_{X_2}^n &= 0.5 \times 0.002 = 0.001 \\ T_{X_3}^n &= 0.5 \times 0.001 = 0.0005\end{aligned}\quad (3.39)$$

La nouvelle valeur de V_{\max} devient alors :

$$\begin{aligned}V_{\max} &= \left(\tau_E - \sum_{i=1}^3 \tau_{X_i} \right) + \left(T_E + \sum_{i=1}^3 T_{X_i} \right) \\ &= (4.505 - 4.500) + (0.0005 + 0.0025) \\ &= 0.005 + 0.003 \\ &= 0.008\end{aligned}\quad (3.40)$$

Les concepteurs s'assurent que la limite inférieure est toujours respectée en recalculant la valeur de V_{\min} :

$$\begin{aligned}
 V_{\min} &= \left(\tau_E - \sum_{i=1}^3 \tau_{X_i} \right) - \left(T_E + \sum_{i=1}^3 T_{X_i} \right) \\
 &= (4.505 - 4.500) - (0.0005 + 0.0025) \\
 &= 0.005 - 0.003 \\
 &= 0.002
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Avec ces nouvelles tolérances, les contraintes préétablies sur V sont respectées.

3.5.2 Étude d'un cas non linéaire

Reprenons l'exemple de la figure 3.3 représentant l'assemblage d'une pédale d'embrayage. La relation mathématique entre la variable dépendante (l'angle de contact) Y et les variables indépendantes (diamètres des composants) X_i est la suivante :

$$Y = \cos^{-1} \left[\frac{X_1 + \frac{X_2 + X_3}{2}}{X_4 - \frac{X_2 + X_3}{2}} \right]$$

La valeur nominale désirée (τ_Y^d) et la tolérance désirée (T_Y^d) pour Y ont été fixées à 0.1200 ± 0.030 soit l'intervalle $(0.090, 0.150)$.

La valeur nominale (τ) et la tolérance (T) de chacun des composants de l'assemblage sont définis par ($\tau \pm T$) :

$$\begin{aligned} X_1 &: 55.29 \pm 0.156 \text{ mm} \\ X_2 &: 22.86 \pm 0.013 \text{ mm} \\ X_3 &: 22.86 \pm 0.013 \text{ mm} \\ X_4 &: 101.60 \pm 0.156 \text{ mm} \end{aligned} \quad (3.42)$$

L'intervalle associé à chacun des composants est donc

$$\begin{aligned} X_1 &: (55.134, 55.416) \\ X_2 &: (22.847, 22.873) \\ X_3 &: (22.847, 22.873) \\ X_4 &: (101.444, 101.756) \end{aligned} \quad (3.43)$$

La valeur nominale calculée (τ_Y^c) pour Y s'obtient en remplaçant chacun des composants de la fonction par leurs valeurs nominales.

$$\begin{aligned} \tau_Y^c &= \cos^{-1} \left[\frac{55.29 + \frac{22.86 + 22.86}{2}}{101.60 - \frac{22.86 + 22.86}{2}} \right] \\ &= 0.1225 \end{aligned} \quad (3.44)$$

On constate que la valeur nominale calculée (0.1225) est supérieure à la valeur nominale désirée (0.1200).

Le calcul de la valeur de la tolérance de Y passe par le calcul des dérivées partielles (sensibilité) de la fonction g pour chacune des variables.

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{\partial \cos^{-1} \left[\frac{X_1 + \frac{X_2 + X_3}{2}}{X_4 - \frac{X_2 + X_3}{2}} \right]}{\partial X_i} \quad i=1,2,3,4 \quad (3.45)$$

Puisque le diamètre des composants X_2 et X_3 est identique, on peut réécrire

$$\frac{X_2 + X_3}{2} = X_2 \quad (3.46)$$

et la fonction g prend alors la forme

$$Y = g(X_1, X_2, X_4) = \cos^{-1} \left[\frac{X_1 + X_2}{X_4 - X_2} \right] \quad (3.47)$$

La dérivée de cette fonction par rapport à X_i est :

$$\frac{\partial g}{\partial X_1} = \frac{\partial \cos^{-1} \left[\frac{X_1 + X_2}{X_4 - X_2} \right]}{\partial X_1} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{X_1 + X_2}{X_4 - X_2} \right)^2}} \times \frac{1}{X_4 - X_2} \quad (3.48)$$

La sensibilité de la variable Y par rapport au composant X_i est obtenue en remplaçant la valeur nominale de chacun des composants X_1 , X_2 et X_4 dans l'équation (3.48).

$$\frac{\partial g}{\partial X_1} = -0.1039$$

La sensibilité par rapport aux autres composants s'obtient par la même méthode.

$$\frac{\partial g}{\partial X_2} = -0.1035 \quad \frac{\partial g}{\partial X_3} = -0.1035 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial X_4} = 0.1032$$

Il est maintenant possible de calculer la tolérance de l'assemblage à l'aide de la valeur de sensibilité de chacun des composants.

$$\begin{aligned} T_Y^c &= |-0.1039| 0.156 + |-0.1035| 0.013 \\ &\quad + |-0.1035| 0.013 + |0.1032| 0.156 \\ &= 0.035 \end{aligned} \quad (3.49)$$

L'étape suivante est le calcul de la limite minimale et de la limite maximale de Y . Le tableau 3.1 présente les valeurs de X_i pour les différentes valeurs de Y ainsi que les valeurs de Y_{min} et Y_{max} obtenues par approximation à l'aide des équations (3.16) à (3.19).

Tableau 3.1 : Intervalle de variation de Y

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y calculé
Valeur cible (τ)	55.29	22.86	22.86	101.60	0.1225
Tolérance (T)	0.156	0.013	0.013	0.156	0.035
Dérivée partielle	-0.1039	-0.1035	-0.1035	0.1032	
Valeur de T_{X_i} pour calculer Y_{min}	0.156	0.013	0.013	-0.156	0.0875
Valeur de T_{X_i} pour calculer Y_{max}	-0.156	-0.013	-0.013	0.0156	0.1575

Les limites calculées (0.0875, 0.1575) ne sont pas à l'intérieur des limites désirées de (0.090, 0.150). De plus, il y a un écart entre la valeur nominale désirée (0.1200) et la valeur nominale calculée (0.1225).

Les concepteurs peuvent employer trois possibilités pour remédier à cette situation : modifier légèrement les valeurs nominales τ_{X_i} , réduire les tolérances T_{X_i} ou encore une combinaison des deux méthodes précédentes.

3.5.2.1 Ajustement des valeurs nominales

Examinons la première solution, soit l'ajustement des valeurs nominales actuelles $\tau_{X_i}^a$ des composants par de nouvelles valeurs nominales $\tau_{X_i}^n$. L'écart entre la valeur nominale désirée et le point milieu de l'intervalle calculé est :

$$\begin{aligned}\Delta Y &= 0.1200 - \frac{(0.1575 + 0.0875)}{2} \\ &= 0.1200 - 0.1225 \\ &= -0.0025\end{aligned}\tag{3.50}$$

En supposant qu'il est possible d'intervenir seulement sur les composants X_1 et X_4 , et en utilisant les équation (3.25), (3.26) et (3.28), on obtient les nouvelles valeurs cibles.

$$\begin{aligned}f &= \frac{|-0.0025|}{(+)|-0.1039|(0.156) + (+)|0.1032|(0.156)} \\ &= \frac{0.0025}{0.01621 + 0.01610} \\ &= 0.0774\end{aligned}\tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}\tau_{X_1}^n &= 55.29 + (-)(-)(0.0774)(0.156) = 55.30 \\ \tau_{X_4}^n &= 101.60 + (-)(+)(0.0774)(0.156) = 101.59\end{aligned}\tag{3.52}$$

En reprenant l'exercice de calculer la limite inférieure et supérieure de Y avec les nouvelles valeurs nominales de X_1 et X_4 , nous obtenons les limites suivantes :

Tableau 3.2 : Intervalle de variation de Y après l'ajustement des valeurs nominales

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y calculé
Valeur cible ajustée (τ^n)	55.30	22.86	22.86	101.59	0.1204
Tolérance (T)	0.156	0.013	0.013	0.156	0.035
Dérivée partielle	-0.1039	-0.1035	-0.1035	0.1032	
Valeur de T_{X_i} pour calculer Y_{min}	0.156	0.013	0.013	-0.156	0.0854
Valeur de T_{X_i} pour calculer Y_{max}	-0.156	-0.013	-0.013	0.156	0.1554

En comparant ces nouvelles limites calculées (0.0854,0.1554), on remarque qu'elles ne répondent toujours pas à ce qui est désiré, soit l'intervalle (0.090,0.150).

Il est bien entendu que l'ajustement des valeurs nominales est la solution la plus économique. La solution est envisageable seulement si la demi longueur de l'intervalle de tolérance calculé est inférieure à la tolérance désirée (T_Y^d) de Y . Dans le cas présent, la tolérance associé à l'intervalle calculé est supérieure à la tolérance désirée (0.030).

$$\begin{aligned}
 T_Y^{\text{Intervalle}} &= \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{2} \\
 &= \frac{0.1595 - 0.0895}{2} = 0.035
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Donc, un ajustement des valeurs cibles n'est pas la bonne solution dans l'exemple de la pédale d'embrayage.

3.5.2.2 Ajustement des tolérances

Examinons maintenant la deuxième solution, soit la réduction des tolérances de un ou de plusieurs composants. La première étape consiste à trouver le point milieu de l'intervalle calculé, noté $\tau_Y^{Intervalle}$.

$$\tau_Y^{Intervalle} = \frac{(0.1575 + 0.0875)}{2} = 0.1225 \quad (3.54)$$

On cherche ensuite à trouver la différence entre ce point milieu et la limite de l'intervalle désiré qui n'a pas été respectée ($Y_{\min(\max)}^d$). Puisque les deux limites calculées ne respectent pas les limites désirées, la tolérance recherchée sera égale à la plus petite des deux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} T_Y^{Diff} &= \left| \tau_Y^{Intervalle} - Y_{\min}^d \right| \\ &= |0.1225 - 0.090| \\ &= 0.0325 \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} T_Y^{Diff} &= \left| \tau_Y^{Intervalle} - Y_{\max}^d \right| \\ &= |0.1225 - 0.150| \\ &= 0.0275 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Comme pour la tolérance calculée (T_Y^c), cette tolérance peut être écrite en fonction des tolérances associées aux composants où l'on supposera que seulement les composants X_1 et X_4 peuvent faire l'objet d'un ajustement de leurs tolérances :

$$T_Y^{Diff} = \left| \frac{\partial g}{\partial X_1} \right| \alpha T_{X_1} + \left| \frac{\partial g}{\partial X_4} \right| \alpha T_{X_4} + \left| \frac{\partial g}{\partial X_2} \right| T_{X_2} + \left| \frac{\partial g}{\partial X_3} \right| T_{X_3} \quad (3.57)$$

La fraction α est calculée par :

$$\alpha = \frac{0.0275 - 2(0.1035 \times 0.013)}{(0.1039 \times 0.156) + (0.1032 \times 0.156)} = \frac{0.0248}{0.0323} = 0.768 \quad (3.58)$$

Les nouvelles tolérances de X_1 et X_4 deviennent alors :

$$\begin{aligned} T_{X_1}^n &= 0.768(0.156) = 0.120 \\ T_{X_4}^n &= 0.768(0.156) = 0.120 \end{aligned} \quad (3.59)$$

et les limites de Y sont de nouveau calculées. Le tableau 3.3 résume les nouveaux résultats.

Tableau 3.3 : Intervalle de variation de Y après l'ajustement des tolérances

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y calculé
Valeur cible (τ)	55.29	22.86	22.86	101.60	0.1225
Tolérance ajustée (T^n)	0.120	0.013	0.013	0.120	0.028
Dérivée partielle	-0.1039	-0.1035	-0.1035	0.1032	
Valeur de T_{X_i} pour calculer Y_{min}	0.120	0.013	0.013	-0.120	0.0945
Valeur de T_{X_i} pour calculer Y_{max}	-0.120	-0.013	-0.013	0.120	0.1505

Les nouvelles limites calculées (0.0945, 0.1505) ne se retrouvent pas tout à fait à l'intérieur des limites désirées (0.090, 0.1570). La tolérance calculée de Y (T_Y^c) est passée de 0.035 à 0.028, ce qui est plus petit que la tolérance désirée de Y . Une petite modification des valeurs nominales serait la bonne solution pour corriger le problème.

3.6 Conclusion

Bien que cette approche soit simple et intuitive, elle devient vite inutilisable à mesure que le niveau de complexité de l'assemblage augmente. Un désavantage qui peut être tout aussi bien un avantage est le côté très conservateur de la méthode du pire cas. Lorsqu'il est question d'une caractéristique très critique, une pompe cardiaque par exemple, l'aspect très peu probable associé à cette approche est perçu comme un avantage. Toutefois, l'utilisation de la méthode du pire cas peut augmenter inutilement les coûts de production en mettant l'emphasis uniquement sur des événements dont la probabilité est généralement très faible comme nous le verrons avec la méthode statistique dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 4

ANALYSE DES TOLÉRANCES AVEC LA MÉTHODE STATISTIQUE

Ce chapitre présente une seconde méthode pour analyser les tolérances. La généralité de la méthode est illustrée dans différents contextes. La méthode de simulation est présentée dans ce chapitre puisque la base de cette méthode est fondamentalement de nature statistique. Des exemples pratiques d'application sont illustrés à la fin de ce chapitre. Nous exposons les avantages et les inconvénients de cette méthode en comparaison avec la méthode du pire cas.

4.1 Introduction

La méthode statistique d'analyse des tolérances se retrouve dans la littérature sous diverses appellations : propagation de l'erreur, propagation des moments ou encore analyse d'incertitude. Cette méthode prend en considération la notion de probabilité statistique ainsi que la notion de capabilité d'un procédé. L'idée derrière cette méthode est de pouvoir répondre à différentes questions telles que :

- quelle est la moyenne et la variance de la variable Y ?
- quel pourcentage de la variable Y se retrouve à l'intérieur des limites de spécification ?
- quelles sont les variables X_i qui ont l'impact le plus important sur la variabilité de la variable Y ?
- quelles sont les tolérances nécessaires sur les variables X_i afin de pouvoir maintenir la variable Y dans un intervalle spécifique ?

La connaissance des réponses à ces questions aura un impact important sur les interventions qui seront apportées sur les composants d'un assemblage. La méthode statistique est essentiellement basée sur le calcul de variabilité (distribution) plutôt que

de se limiter seulement aux cas extrêmes qui est le principe de base de la méthode du pire cas. Cette dernière néglige complètement le comportement global du système en se basant uniquement aux événements extrêmes.

4.2 Généralité de la méthode statistique

L'idée derrière l'approche statistique est d'étudier la variabilité transmise par les composants sur l'assemblage qu'ils forment. Cette approche permet de classer les paramètres en deux catégories : ceux pour lesquels les tolérances doivent être resserrées et ceux pour lesquels les tolérances peuvent être relâchées.

L'équation suivante, à la base de toutes les analyses statistiques des tolérances, est appelée la méthode "*Root Sum of Squares*" en anglais :

$$\begin{aligned} T_Y &= \sqrt{T_{X_1}^2 + T_{X_2}^2 + \dots + T_{X_n}^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n T_{X_i}^2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Une hypothèse très importante est faite : les composants sont indépendants. Dans plusieurs cas, la tolérance est fixée à trois fois la valeur de l'écart type en considérant la distribution normale comme modèle de variabilité des X_i . Ce ne sont pas toutes les situations où la tolérance est égale à trois fois l'écart type, mais cette approche est souvent utilisée pour fixer les tolérances en début d'étude. Elle présuppose que les procédés de fabrication correspondant sont capables de satisfaire les limites de spécification des composants ($C_p = 1$).

$$\begin{aligned} T_i &= 3\sigma_i \\ \sigma_i &= \frac{T_i}{3} \end{aligned} \quad (4.2)$$

L'équation (4.1) peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} 3\sigma_Y &= \sqrt{(3\sigma_{x_1})^2 + (3\sigma_{x_2})^2 + \dots + (3\sigma_{x_n})^2} \\ \sigma_Y &= \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ou encore

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{T_{X_1}}{3}\right)^2 + \left(\frac{T_{X_2}}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{T_{X_n}}{3}\right)^2} \quad (4.4)$$

4.3 Analyse dans un cas d'empilage

Comme dans le cas du pire cas, l'espace de vide V est la variable à l'étude. L'application de la méthode statistique est basée sur la variabilité associée à la variable dépendante. En se basant sur l'équation (4.3) nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_V &= \sqrt{\sigma_E^2 + \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2} \\ &= \sqrt{\sigma_E^2 + \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_V &= \sqrt{\left(\frac{T_E}{3}\right)^2 + \left(\frac{T_{X_1}}{3}\right)^2 + \left(\frac{T_{X_2}}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{T_{X_n}}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{T_E}{3}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{X_i}}{3}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Harry et Stuart (1981) proposent d'estimer l'écart type des composants à l'aide de l'équation suivante en faisant intervenir la capabilité (C_p) du procédé :

$$\sigma_{i\text{ajusté}} = \frac{T_i}{3C_p} \quad (4.7)$$

Cet écart type ajusté tient compte du niveau de capabilité du processus de fabrication (C_p). L'estimation de l'écart type ajusté de chacun des composants permet d'obtenir l'écart type de l'espace de vide suivant :

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{T_E}{3C_{p_E}}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{X_i}}{3C_{p_{X_i}}}\right)^2} \quad (4.8)$$

Plus le coefficient de capabilité C_p sera grand, plus la variance associée à l'espace de vide sera petite. Lorsque $C_p=1$, on retrouve les formules déjà vues.

L'utilisation du coefficient de capabilité C_p dans l'équation (4.8) repose sur l'hypothèse que le procédé de fabrication est stable dans le temps, c'est-à-dire que le procédé de fabrication est toujours centré sur la valeur nominale. Bien que cette situation soit vraie à court terme, elle ne l'est pas nécessairement à long terme. Pour cette raison, il a été proposé d'utiliser le coefficient de capabilité C_{pk} . Ce coefficient a la propriété de tenir compte une déviation du procédé de fabrication par rapport à la valeur nominale.

La formule de l'écart type reste la même à l'exception des C_p qui sont remplacés par des C_{pk} .

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{T_E}{3C_{pk}_E}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{T_{X_i}}{3C_{pk}_{X_i}}\right)^2} \quad (4.9)$$

Le calcul permet d'identifier quels sont les composants qui contribuent le plus (moins) à la variabilité de la variable de réponse. Ceci vient faciliter le ou les moyens d'action à prendre lorsque nécessaire.

4.4 Analyse dans un cas d'assemblage non linéaire

Le principe d'application de la méthode statistique dans un cas non linéaire est le même que celui pour la méthode du pire cas : transformer, à l'aide d'un développement de Taylor, la fonction non linéaire en une fonction linéaire.

Comme pour le cas linéaire, la somme des variances des composants nous donnera la variabilité de la variables dépendante à l'étude, sous l'hypothèse d'indépendance des X_i . La seule différence se situe au niveau de l'utilisation des dérivées partielles. La variance associée à Y est donc égale à :

$$\sigma_Y^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 \sigma_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 \sigma_{X_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 \sigma_{X_n}^2 \quad (4.10)$$

De l'équation précédente, on retrouve la formule pour la tolérance calculée de Y :

$$T_Y^c = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2 T_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2 T_{X_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2 T_{X_n}^2} \quad (4.11)$$

en supposant que la tolérance est égale à trois fois l'écart type et que $C_p=1$. Il est aussi possible d'appliquer ce qui a été proposé par Harry et Stuart en utilisant les coefficients de capabilité dans le calcul des écarts types. Comme dans le cas linéaire, l'équation (4.10) nous permet de voir la contribution de chacun des composants à la variabilité de Y . Dans le cas non linéaire, il est important de tenir en compte deux éléments : la variabilité et la dérivée partielle (sensibilité) du composant. En effet, il sera inutile de dépenser des ressources à vouloir réduire la variabilité d'un composant présentant une variance très élevée mais dont la sensibilité est très petite. À l'inverse, il sera plus avantageux de diminuer la variabilité du composant dont la dérivée partielle est grande, même si la variance de ce composant est petite en comparaison avec d'autres.

4.5 Approximation de la fonction de densité de Y

Afin de pouvoir déterminer le pourcentage de la variable de réponse qui se situera à l'extérieur des limites de spécification, Cox (1986) propose de passer par l'approximation de la fonction de densité. Dans la majorité des cas, on fait l'hypothèse que Y suit une loi normale. Cependant, dans le cas où cette hypothèse n'est pas respectée, la probabilité de tomber à l'intérieur des spécifications sera mal estimée. Cox propose donc une approche permettant d'évaluer l'utilisation de la loi normale pour la variable de réponse Y ainsi qu'une option dans le cas où la loi normale n'est pas adéquate.

L'auteur se base sur deux caractéristiques associées à une distribution : le coefficient d'asymétrie ("*skewness*") et le coefficient d'aplatissement ("*kurtosis*") qu'il note $\sqrt{\beta_1}$ et β_2 respectivement. Dans le cas d'une distribution symétrique, comme la distribution normale, le coefficient d'asymétrie est égal à zéro. Pour ce qui est du coefficient d'aplatissement, ce dernier est égal à 3 pour la fonction de densité d'une loi normale, est égale à 1.8 dans le cas d'une loi uniforme et est supérieure à 3 pour une fonction de densité moins aplatie que la loi normale.

Une façon de vérifier si la loi normale est applicable est de calculer les deux coefficients $\sqrt{\beta_1}$ et β_2 . Si ces derniers se situent à l'intérieur de limites raisonnables autour de zéro et trois, alors la loi normale peut être considérée comme une bonne approximation de la fonction de densité de la variable de réponse. La règle que l'auteur utilise comme limites pour les coefficients est la suivante :

$$\begin{aligned} -0.05 < \sqrt{\beta_1} < 0.05 \\ 2.95 < \beta_2 < 3.05 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Si les coefficients ne satisfont pas les critères mentionnés, alors il est possible d'utiliser une distribution empirique à laquelle correspondent les coefficients qui ont été calculés. Shapiro et Gross (1981) présentent trois systèmes de fonction de densité qui peuvent être utilisés pour associer les coefficients à une distribution : le système généralisé Lambda, le système de Johnson et le système de Pearson. Cox (1986) utilise le système de Pearson à partir de tables basées sur les deux coefficients pour évaluer les probabilités que la variable de réponse se situe à l'intérieur des limites lorsque la distribution est normale.

4.6 Analyse avec la méthode de simulation de Monte Carlo

Bien que la méthode statistique soit une méthode qui semble être plus réaliste, cette dernière demande beaucoup de calculs et repose sur différentes hypothèses qu'il peut être difficile de vérifier. L'utilisation des simulations vient simplifier et faciliter l'analyse des tolérances, tout particulièrement lorsqu'il est question d'une fonction non linéaire. De plus, elle permet d'étudier la robustesse des résultats par l'examen de plusieurs hypothèses sur les composants. Tout cela se fait facilement et rapidement à condition d'avoir un logiciel performant et facile à utiliser pour réaliser les simulations.

L'utilisation d'un bon logiciel de simulation et d'un ordinateur permettra d'exécuter des milliers de simulations dans un temps très court. Ainsi, l'équipe de conception pourra rapidement voir les chances de succès d'un assemblage tout en tenant compte de certaines incertitudes associées aux composants. Il sera aussi possible d'identifier les composants qui ont un impact important sur la variabilité de la variable de réponse. L'une des seules contraintes à utiliser les simulations est la connaissance de la fonction mathématique reliant la variable Y aux variables X_i . Cette relation peut être indirecte et reposer sur la mise en œuvre d'un programme informatique, par exemple un programme de calcul d'éléments finis pour résoudre un système d'équations différentielles.

Des exemples de simulations sont présentés dans la prochaine section. Ces dernières ont été réalisées à l'aide du logiciel *Crystal Ball*® reposant sur la technique de Monte Carlo. La figure 4.1 présente le cycle de simulation suivie lors des simulations.

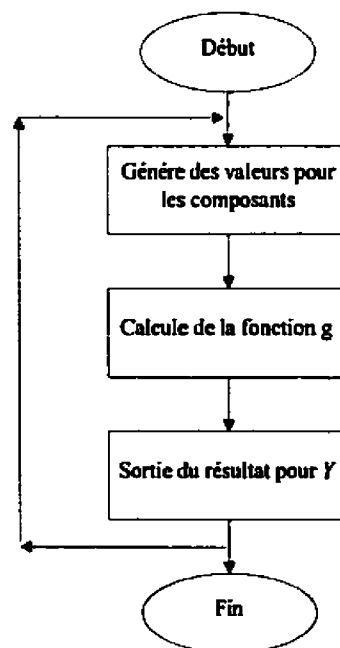


Figure 4.1 : Cycle de simulation

À chacune des variables X_i est associée une distribution statistique qui a préalablement été choisie. La génération des valeurs pour les variables X_i est fonction de cette distribution statistique. Chacune des variables X_i qui entre dans la fonction est appelée hypothèse ("*Assumption*") dans *Crystal Ball*. Lorsque toutes les hypothèses sont précisées, la variable Y est définie à son tour. La définition de la variable Y correspond à la relation mathématique qui la relie aux variables X_i . C'est ce que *Crystal Ball* appelle la prévision ("*Forecast*").

Lorsque toutes les hypothèses et la ou les variables de prévisions ont été définies, la simulation peut être amorcée. Les résultats sont ensuite présentés sous différentes formes de graphiques et de statistiques descriptives aisément interprétables.

4.7 Les coûts technologiques

Un changement des tolérances implique nécessairement un changement des coûts. Il est possible de calculer l'impact de ce changement à l'aide de l'équation de la perte quadratique moyenne (PM) présentée au chapitre 2.

$$PM = k \left[\sigma_Y^2 + (\mu_Y - \tau_Y)^2 \right] \quad (4.13)$$

où σ_Y^2 est la variance de Y telle que décrite par l'équation (4.10).

Le principe de cette analyse économique est de comparer la réduction de la perte moyenne (PM_R), avec le coût additionnel C en choisissant une technologie supérieure avec de nouveaux écarts types (σ_{i1}) plus petits que les écarts types initiaux (σ_{i0}) pour les composants : $\sigma_{i1} < \sigma_{i0}$.

La réduction de la perte moyenne (PM_R) est donnée par

$$PM_{Ri} = k\beta_i(\sigma_{i0}^2 - \sigma_{i1}^2) \quad (4.14)$$

Le tableau 4.1 présente les calculs nécessaires pour savoir si les modifications apportées sont bénéfiques d'un point de vue économique.

Tableau 4.1 : Analyse économique des tolérances

Composant	Écart type initial (σ_i^0)	Nouvel écart type (σ_i^1)	Coût additionnel	Réduction (PM_{Ri})	Économie (E_i)
X_1	$\sigma_{X_1}^0$	$\sigma_{X_1}^1$	C_1	PM_{R1}	$PM_{R1} - C_1$
X_2	$\sigma_{X_2}^0$	$\sigma_{X_2}^1$	C_2	PM_{R2}	$PM_{R2} - C_2$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
X_n	$\sigma_{X_n}^0$	$\sigma_{X_n}^1$	C_n	PM_{Rn}	$PM_{Rn} - C_n$
Perte (\$)	$PM_{initiale}$	$PM_{nouvelle}$	$\sum_{i=1}^n C_i$		

L'étape suivante consiste à calculer la différence entre la perte moyenne initiale et la nouvelle perte moyenne.

$$Diff_{PM} = PM_{initiale} - PM_{nouvelle} \quad (4.15)$$

Pour savoir si la réduction des écarts types est bénéfique d'un point de vue économique, il suffit de comparer la différence entre les pertes moyennes avec la somme des coûts additionnels.

Si cette différence est supérieure aux coûts additionnels, alors le changement est bénéfique.

$$\text{Bénéfice} = \text{Diff}_{PM} - \sum_{i=1}^n C_i \quad (4.16)$$

4.8 Exemples d'application

4.8.1 Étude d'un cas linéaire

Reprenons l'exemple présenté dans le chapitre 3 dans lequel les valeurs cibles et les tolérances des composants étaient égales à

$$\begin{aligned} X_1 &: 1.00 \pm 0.0010 \\ X_2 &: 2.00 \pm 0.0020 \\ X_3 &: 1.50 \pm 0.0010 \\ E &: 4.505 \pm 0.0005 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Les contraintes V_L^d et V_U^d avaient été fixées à 0.000 et 0.008 respectivement. On suppose que l'écart type de chacun des composants est égal à sa tolérance divisée par trois.

$$\begin{aligned} \sigma_{X_1} &= \frac{0.0010}{3} \\ \sigma_{X_2} &= \frac{0.0020}{3} \\ \sigma_{X_3} &= \frac{0.0010}{3} \\ \sigma_E &= \frac{0.0005}{3} \end{aligned} \quad (4.18)$$

L'écart type associé à l'espace de vide est donc égal à :

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{0.001}{3}\right)^2 + \left(\frac{0.002}{3}\right)^2 + \left(\frac{0.001}{3}\right)^2 + \left(\frac{0.0005}{3}\right)^2} = 0.000833 \quad (4.19)$$

Il est possible de calculer un intervalle à ± 3 écarts types autour de la valeur cible de l'espace de vide (τ_V).

$$\tau_V = 4.505 - (1.0 + 2.0 + 1.5) = 0.005 \quad (4.20)$$

L'intervalle à $\pm 3\sigma_V$ est donc (0.0025 , 0.0075). On remarque que cet intervalle se situe très bien à l'intérieur des limites de spécifications pour l'espace de vide. Donc, aucune intervention n'est nécessaire sur cet assemblage. Ceci est en contradiction avec ce qui a été décidé avec l'analyse avec la méthode du pire cas. Toutefois, le résultat de la méthode du pire cas est certain alors que l'intervalle (0.0025 , 0.0075) de la méthode statistique est sûr à 99.73%, en supposant une distribution normale pour V .

Le même exemple a été analysé à l'aide de simulations. La distribution d'une loi normale a été utilisée pour chacun des composants en fixant l'écart type à la tolérance divisée par trois. Le nombre de simulations a été fixé à 5000. Un rapport provenant de *Crystal Ball* avec l'ensemble des hypothèses et des résultats pour les simulations se trouve en annexe à la fin de ce mémoire.

La figure 4.2 présente un graphique des fréquences des 5000 simulations. La case "Certainty" dans le bas de la figure présente le pourcentage de données se situant entre 0.002 et 0.008. Dans le cas actuel, le pourcentage est de 99.98. La figure 4.3 présente un ensemble de statistiques descriptives sur l'espace de vide. On remarque que la valeur

de l'écart type de la figure 4.3 (0.000837) est quasi identique à celui qui avait été calculé lors de l'application de la méthode statistique (0.000833).

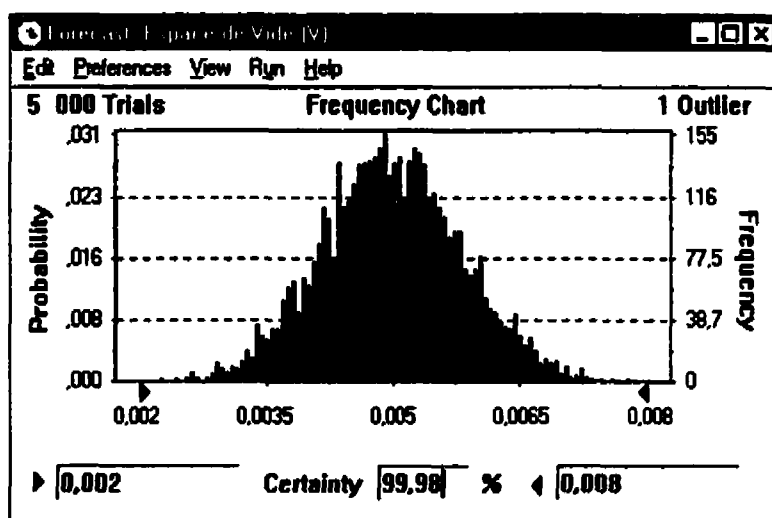


Figure 4.2 : Graphique des fréquences pour le cas linéaire

Forecast - Espace de Vide (V)

Cell B8

Statistic	Value
Trials	5 000
Mean	0.00499138171358876
Median	0.00498021599214304
Mode	---
Standard Deviation	0.00083740666480223
Variance	0.00000070124992226
Skewness	0.0217420148242568
Kurtosis	2.963679130570449
Coeff. of Variability	0.1677705118249
Range Minimum	0.00180732428588826
Range Maximum	0.00778713191228397
Range Width	0.00597980762639572
Mean Std. Error	0.00001184271862585

Figure 4.3 : Statistiques descriptives pour le cas linéaire

Le graphique des fréquences (Figure 4.2) indique qu'une seule des 5000 valeurs de vides est une valeur extrême ("Outlier"). Une valeur est dite extrême lorsqu'elle n'entre pas dans l'intervalle de ± 3 écarts types autour de la moyenne. Il est possible d'obtenir le graphique des fréquences et l'ensemble des statistiques descriptives sans cette valeur extrême.

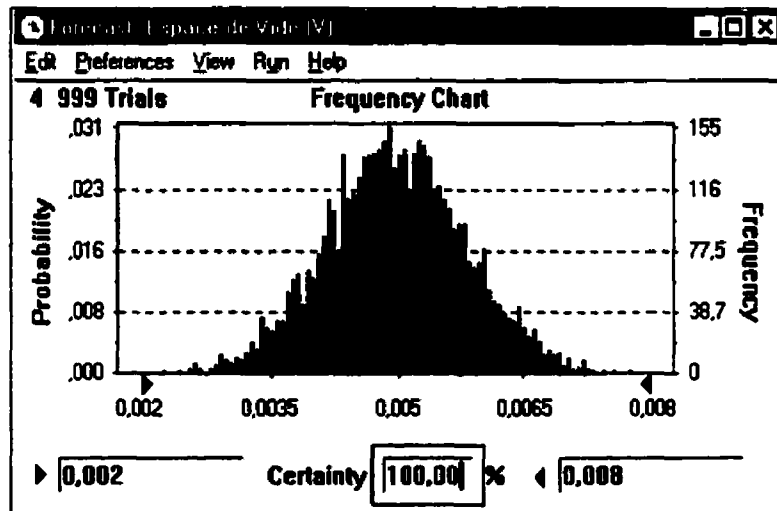


Figure 4.4 : Graphique des fréquences sans la valeur extrême pour le cas linéaire

Statistics		*Display Range*
Statistic	Value	
Trials	4 999	
Mean	0,00499201865246207	
Median	0,0049810409337554	
Mode	—	
Standard Deviation	0,00083627828314917	
Variance	0,000006936136687	
Skewness	0,0305910270170053	
Kurtosis	2,938168837373087	
Coeff. of Variability	0,167523068596051	
Range Minimum	0,002	
Range Maximum	0,008	
Range Width	0,006	
Mean Std. Error	0,000011827943753	

Figure 4.5 : Statistiques descriptives sans la valeur extrême pour le cas linéaire

Le nouveau graphique des fréquences présente maintenant un pourcentage de 100% des valeurs se situant à l'intérieur des limites (0.002,0.008). De plus, on remarque une légère baisse de l'écart type qui passe de 0.000837 à 0.000836.

En plus de ces deux sorties, *Crystal Ball* présente un graphique sur lequel on peut voir la contribution des composants sur la variabilité (Figure 4.6). Il faut noter que la méthode utilisée par *Crystal Ball* n'est qu'une approximation et non pas une décomposition de la variance. En effet, durant les simulations, *Crystal Ball* calcule des coefficients de corrélation sur le rang (*rank correlation coefficient*) entre chaque variables X_i et Y . Ensuite, *Crystal Ball* calcule la contribution à la variabilité en élevant les coefficients au carré et en les normalisant.

$$r_{Y,X_i} = \frac{n \sum_{i=1}^n xy - \sum_{i=1}^n x \sum_{i=1}^n y}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n x^2 - \left(\sum_{i=1}^n x\right)^2} \cdot \sqrt{n \sum_{i=1}^n y^2 - \left(\sum_{i=1}^n y\right)^2}} \quad (4.21)$$

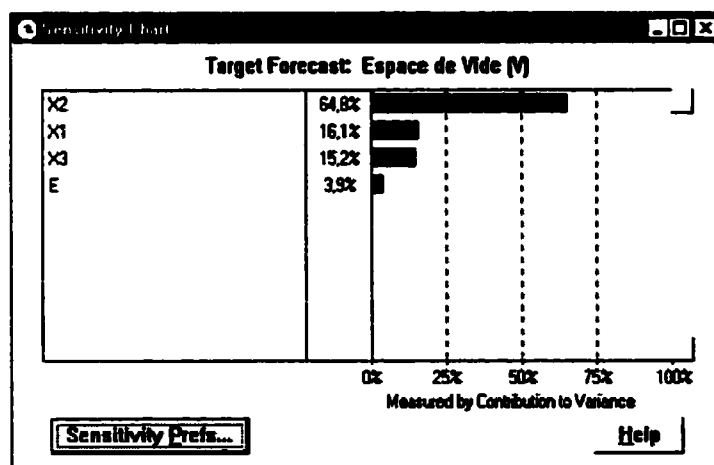


Figure 4.6 : Contribution des composants à la variabilité totale pour le cas linéaire

À l'étude de ces résultats, il est possible de conclure qu'aucune intervention n'est nécessaire sur cet assemblage pour que ce dernier soit possible. Cependant, dans le cas où une intervention aurait été nécessaire, il semble que le composant X_2 aurait été celui sur lequel les concepteurs auraient eu à intervenir. En effet, celui-ci possède la plus grande contribution à la variabilité de Y avec 64.8%.

Reprenons le même exercice du cas linéaire mais en supposant que chacun des composants suit une loi uniforme et non pas une loi normale. Dans ce cas, la valeur de σ pour chacun des composants devient :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sqrt{\frac{((\tau + T) - (\tau - T))^2}{12}} \\
 &= \sqrt{\frac{4T^2}{12}} \\
 &= \frac{T}{\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

L'équation (4.22) nous permet de calculer l'écart type de chacun des composants.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_1} &= \frac{0.0010}{\sqrt{3}} \\
 \sigma_{x_2} &= \frac{0.0020}{\sqrt{3}} \\
 \sigma_{x_3} &= \frac{0.0010}{\sqrt{3}} \\
 \sigma_E &= \frac{0.0005}{\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

L'écart type associé à l'espace de vide est donc égal à :

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{0.001}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.002}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.001}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.0005}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (4.24)$$

$$= 0.00144$$

On remarque que cet écart type est plus grand que celui obtenu lorsque l'on suppose que les composants suivent une loi normale. Il est possible de calculer un intervalle à ± 3 écarts types autour de la valeur cible de l'espace de vide 0.005. L'intervalle à $\pm 3\sigma_v$ est donc (0.00068 , 0.00932). On remarque que cet intervalle ne se situe pas à l'intérieur des limites de spécifications pour l'espace de vide. Donc, en supposant que les composants suivent une loi uniforme, on conclut qu'une intervention est nécessaire sur l'assemblage. L'utilisation d'une distribution uniforme, qui est peu informative, a comme résultat équivalent de supposer une distribution normale mais avec plus de $\sqrt{3}$ variabilité.

Puisque l'étendue de l'intervalle calculé est supérieur à l'étendue de l'intervalle des spécifications ($0.00864 > 0.008$), une intervention sur les valeurs nominales n'est pas utile. L'intervention est la même que celle faite lors de l'analyse avec la méthode du pire cas. La différence se situe par rapport au choix des composants sur lesquels intervenir. En effet, avec la méthode du pire cas, ce choix est plus ou moins arbitraire et n'est pas basé sur des notions statistiques. Avec la méthode statistique, il est possible de déterminer quels sont les composants qui contribuent le plus à la variabilité de l'espace de vide.

Selon les valeurs des écarts types de chacun des composants, il semble que les composants qui contribuent le plus et le moins à la variabilité de l'espace de vide sont X_2 et E respectivement. Les composants X_1 et X_3 contribuent de façon égale. Supposons que la modification est faite sur X_2 et X_3 , comme pour la méthode du pire cas.

Supposons que les nouvelles tolérances des ces deux composants soient deux fois plus petite :

$$\begin{aligned} T_{X_2}^n &= 0.001 \\ T_{X_3}^n &= 0.0005 \end{aligned} \quad (4.25)$$

alors l'écart type pour l'espace de vide devient

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sqrt{\left(\frac{0.001}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.001}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.0005}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0.0005}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= 0.00091 \end{aligned} \quad (4.26)$$

L'intervalle à ± 3 écarts types autour de la valeur cible de l'espace de vide est donc (0.00000 , 0.00773). On remarque que cet intervalle se situe maintenant à l'intérieur des limites de spécifications pour l'espace de vide.

Les simulations ont été refaites avec les nouvelles hypothèses sur les composants. Les figures 4.7 et 4.8 présentent le graphique des fréquences et les statistiques descriptives associés aux 5000 simulations.

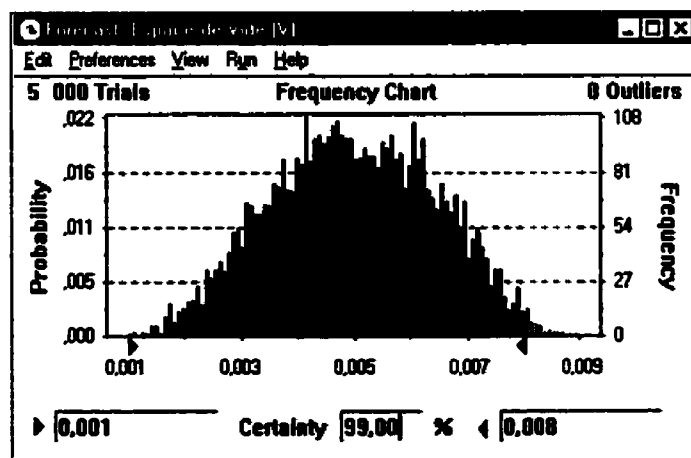
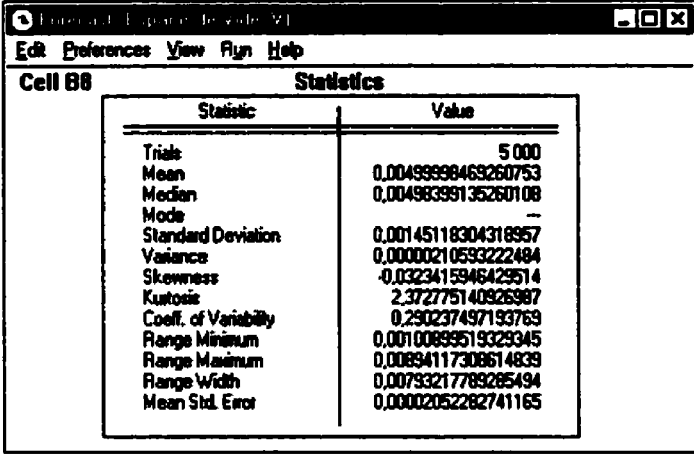


Figure 4.7 : Graphique des fréquences pour le cas linéaire avec la loi uniforme



Statistic	Value
Trials	5 000
Mean	0,00499898469260753
Median	0,00498399135260108
Mode	---
Standard Deviation	0,00145118304318957
Variance	0,00000210593222484
Skewness	-0,0323415946429514
Kurtosis	2,372775140926987
Coeff. of Variability	0,290237497193769
Range Minimum	0,00100899519329345
Range Maximum	0,008941117308614839
Range Width	0,00793217789285494
Mean Std. Error	0,00002052282741165

Figure 4.8 : Statistiques descriptives pour le cas linéaire avec la loi uniforme

Le pourcentage de données se situant dans l'intervalle 0.001 et 0.008 est de 99.00%. La valeur de l'écart type associée aux simulations (0.00145) est quasi identique à celle calculée avec la méthode statistique (0.00144). La figure 4.9 présente la contribution de chacun des composants à la variabilité totale associée à l'espace de vide. Comme dans le cas précédent, les composants qui contribuent le plus et le moins à la variabilité totale sont X_2 et E respectivement.

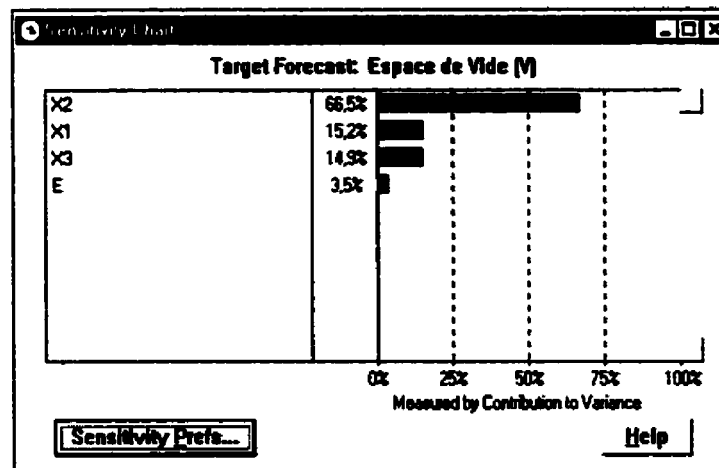


Figure 4.9 : Contribution des composants à la variabilité totale avec la loi uniforme

Les résultats de la méthode de simulation de Monte Carlo viennent confirmer les résultats obtenus à l'aide de la méthode statistique. La modification apportée sur les tolérances des composants X_2 et X_3 a aussi été simulée pour pouvoir comparer les résultats des deux méthodes.

Les figures 4.10 et 4.11 présentent le graphique des fréquences et les statistiques descriptives pour ces 5000 nouvelles simulations.

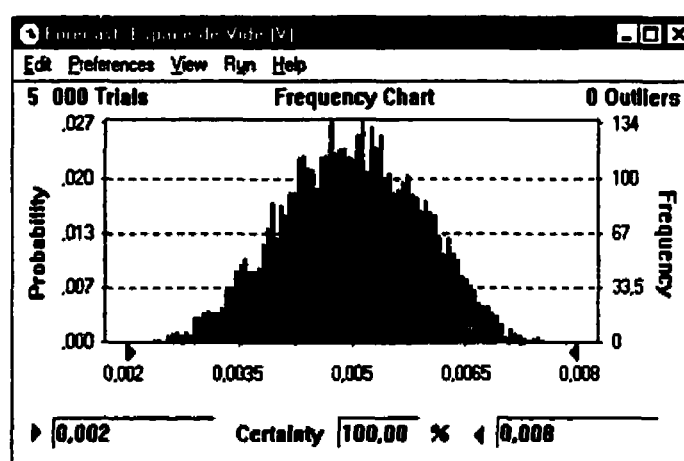


Figure 4.10 : Graphique des fréquences avec la loi uniforme et les nouvelles tolérances

Statistics	
Statistic	Value
Trial	5 000
Mean	0,00500552061531475
Median	0,0050111936782542
Mode	—
Standard Deviation	0,0009159614363045
Variance	0,000008389853528
Skewness	-0,0418204701423335
Kurtosis	2,51480600060515
Coef. of Variability	0,182990243512743
Range Minimum	0,00240337162250781
Range Maximum	0,00752124219412065
Range Width	0,00511787057161284
Mean Std. Error	0,00001295365085833

Figure 4.11 : Statistiques descriptives avec la loi uniforme et les nouvelles tolérances

Le pourcentage des données se situant entre 0.002 et 0.008 est maintenant de 100% avec une tolérance de 0.001 et 0.0005 pour les composants X_2 et X_3 respectivement. L'écart type associé aux simulations (0.00092) est presque identique à celui calculé avec la méthode statistique (0.00091).

La contribution des composants sur la variabilité totale est présentée à la figure 4.12. On remarque que deux des composants contribuent pour plus de 80% de la variabilité : X_2 et X_3 . Toutefois, la contribution de X_3 passe de 15.2% à plus de 40.2%.

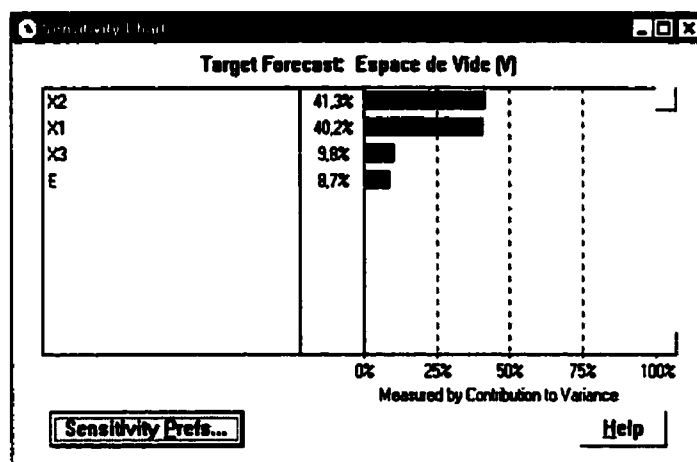


Figure 4.12 : Contribution à la variabilité totale avec les nouvelles tolérances

4.8.2 Étude d'un cas non linéaire

Reprenons l'exemple de la pédale d'embrayage présenté dans le chapitre 3. La fonction mathématique ainsi que les valeurs cibles et les tolérances de chacun des composants étaient :

$$Y = \cos^{-1} \left[\frac{X_1 + \frac{X_2 + X_3}{2}}{X_4 - \frac{X_2 + X_3}{2}} \right] \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}
X_1 &: 55.29 \pm 0.156 \text{ mm} \\
X_2 &: 22.86 \pm 0.013 \text{ mm} \\
X_3 &: 22.86 \pm 0.013 \text{ mm} \\
X_4 &: 101.60 \pm 0.156 \text{ mm}
\end{aligned}
\tag{4.28}$$

La valeur cible désirée (τ_Y^d) et la tolérance désirée (T_Y^d) pour Y ont été fixées à 0.1200 ± 0.030 soit l'intervalle $(0.090, 0.150)$. On se souvient que la valeur cible calculée de Y (τ_Y^c), calculée avec les valeurs nominales initiales des composants, était de 0.1225.

Le calcul des dérivées partielles des composants avait donné

$$\frac{\partial g}{\partial X_2} = -0.1039 \quad \frac{\partial g}{\partial X_2} = -0.1035 \quad \frac{\partial g}{\partial X_3} = -0.1035 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial X_4} = 0.1032$$

On suppose que la tolérance est égale à trois fois l'écart type. La tolérance calculée de Y est donc :

$$\begin{aligned}
T_Y^c &= \sqrt{(-0.1039)^2(0.156)^2 + 2(-0.1035)^2(0.013)^2 + (0.1032)^2(0.156)^2} \\
&= \sqrt{0.0005255} \\
&= 0.02292
\end{aligned}
\tag{4.29}$$

On remarque que cette tolérance est plus petite que la tolérance désirée de 0.030. En calculant un intervalle autour de la valeur cible calculée, on obtient l'intervalle $(0.09958, 0.1454)$. La comparaison de l'intervalle calculé avec l'intervalle désiré $(0.090, 0.150)$ nous permet de conclure qu'il n'est pas nécessaire d'intervenir. Encore une fois, cette conclusion est en contradiction avec ce qui a été décidé avec la méthode du pire cas.

L'exemple de la pédale d'embrayage a aussi été analysé à l'aide de simulations. La distribution d'une loi normale a été utilisée pour chacun des quatre composants en fixant l'écart type à la tolérance divisée par trois. Le nombre de simulations a été fixé à 10000. Le rapport provenant de *Crystal Ball* avec l'ensemble des hypothèses et des résultats pour les simulations se trouve en annexe à la fin de ce mémoire.

La figure 4.13 présente un graphique de fréquences des 10 000 simulations. La case "Certainty" dans le bas de la figure présente le pourcentage de données se situant entre 0.0991 et 0.1453. Dans le cas actuel, le pourcentage est de 99.67. La figure 4.14 présente l'ensemble de statistiques descriptives sur Y . On remarque que l'écart type associé aux simulations (0.00769) est presque identique à celui calculé lors de l'application de la méthode statistique et qui était de $0.00764 \left(= \frac{T_r^c}{3} \right)$.

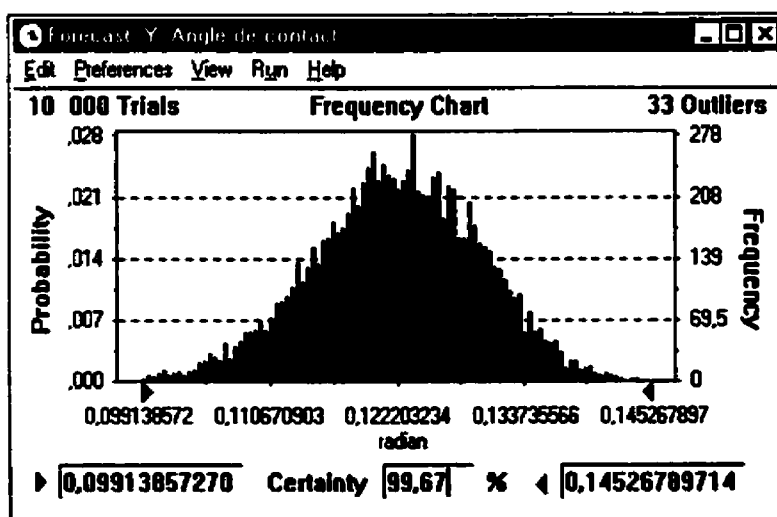


Figure 4.13 : Graphique des fréquences pour le cas non linéaire

Statistics	
Statistic	Value
Trial	10 000
Mean	0,122203234925727
Median	0,122403378545979
Mode	—
Standard Deviation	0,00768822073954329
Variance	0,00005910873813994
Skewness	-0,194206990308637
Kurtosis	3,094950529622874
Coeff. of Variability	0,0629133978672171
Range Minimum	0,0860940326817696
Range Maximum	0,147631116752287
Range Width	0,0615370840705172
Mean Std. Error	0,00007688220739543

Figure 4.14 : Statistiques descriptives pour le cas non linéaire

Sur les 10 000 valeurs de Y , 33 sont des valeurs extrêmes (*Outliers*). Les figures 4.15 et 4.16 présentent les résultats sans elles.

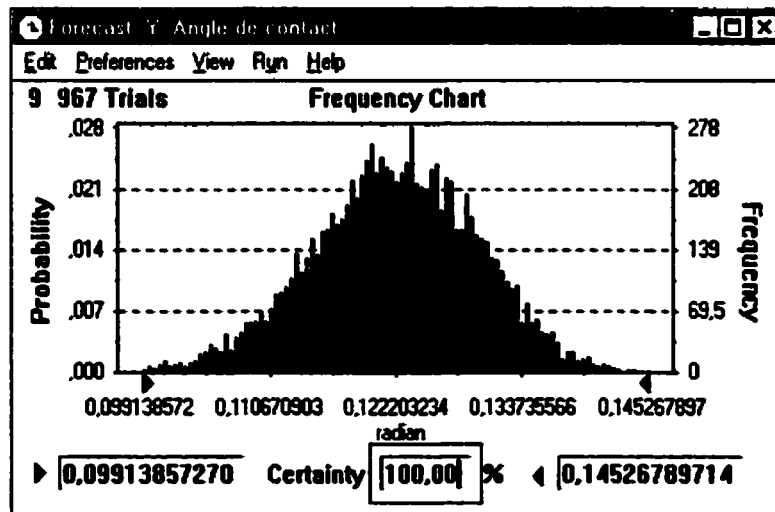


Figure 4.15 : Graphique des fréquences sans les valeurs extrêmes pour le cas non linéaire

Statistic	Value
Trials	9 967
Mean	0,122249565151807
Median	0,122418845468535
Mode	---
Standard Deviation	0,00755371334495818
Variance	0,0000570585852978
Skewness	-0,139654101768033
Kurtosis	2,835730916885474
Coeff. of Variability	0,0617892860034155
Range Minimum	0,0991385727070976
Range Maximum	0,145267897144357
Range Width	0,0461293244372598
Mean Std. Error	0,0000756620790453

Figure 4.16 : Statistiques descriptives sans les valeurs extrêmes pour le cas non linéaire

Le pourcentage des valeurs se situant dans l'intervalle (0.0991, 0.1453) est maintenant de 100%. De plus, on remarque une légère baisse de l'écart type qui passe de 0.007688 à 0.007553.

La figure 4.17 montre que les variables X_4 et X_1 contribuent à 99.4% de la variabilité de la variable Y et leur contribution individuelle est à peu près égale. Les composants X_2 et X_3 ont une contribution négligeable à la variabilité de l'assemblage.

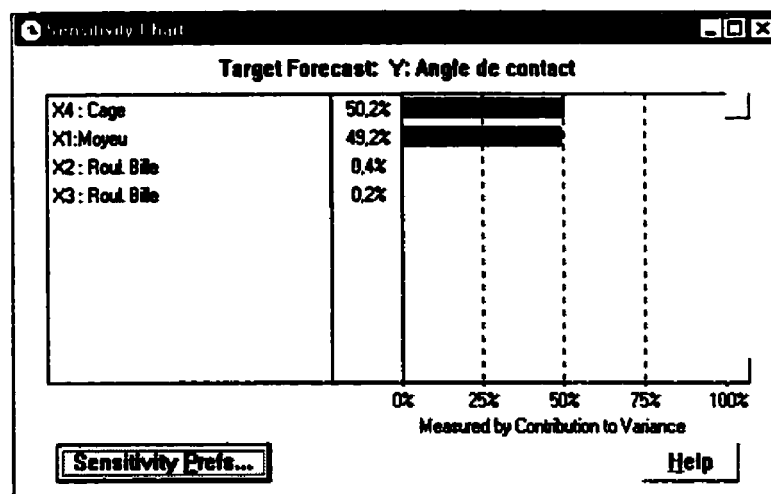


Figure 4.17 : Contribution des composants à la variabilité totale pour le cas non linéaire

Comme pour la méthode d'analyse statistique, la méthode avec simulations nous permet de conclure qu'aucune intervention n'est nécessaire. L'angle de contact devrait se situer à l'intérieur des limites désirées avec les valeurs nominales et les tolérances initiales.

4.8.3 Analyse économique pour le cas non linéaire

Les conclusions faites avec la méthode statistique et la méthode avec simulations entrent en contradiction avec ceux provenant de la méthode du pire cas. Supposons que les concepteurs décident tout de même d'appliquer la modification sur les tolérances des composants X_1 et X_4 . On se souvient que les nouvelles tolérances avaient été fixées à 0.120 pour les deux composants. Par expérience, les concepteurs savent que la perte (A) associée à une mise au rebut ou à la réparation d'un produit non satisfaisant est de 100\$. Donc, la valeur de k dans l'équation de la perte moyenne quadratique sera égale à

$$\begin{aligned} k &= \frac{A}{T_Y^2} \\ &= \frac{100}{(0.03)^2} \\ &= 111111.11 \end{aligned} \tag{4.30}$$

L'équation de la perte moyenne est la suivante

$$PM = 111111.11 \left[\sigma_Y^2 + (0.1225 - 0.1200)^2 \right] \tag{4.31}$$

En supposant que l'écart type de chacun des composants est égal à la tolérance divisée par trois, nous obtenons les valeurs initiales et les nouvelles valeurs des écarts types de chacun des composants.

Tableau 4.2 : Écarts types des composants

Paramètre	Valeur initiale		Nouvelle valeur	
	Tolérance	Écart type	Tolérance	Écart type
X_1	0.156	0.0520	0.120	0.0400
X_2	0.013	0.0043	0.013	0.0043
X_3	0.013	0.0043	0.013	0.0043
X_4	0.156	0.0520	0.120	0.0400

Le coût additionnel pour passer d'un écart type de 0.052 à 0.040 est de 1.00 \$ pour le composant X_1 et de 0.95 \$ pour le composant X_4 . Le tableau 4.3 présente l'ensemble des calculs pour l'analyse économique.

Tableau 4.3 : Analyse économique des tolérances pour le cas non linéaire

Paramètre	Écart type initiale (σ_i^0)	Nouvel écart type (σ_i^1)	Coût additionnel	Réduction (PM_R)	Économie
X_1	0.052	0.040	1.00 \$	1.32	0.32
X_4	0.052	0.040	0.95 \$	1.32	0.37
σ_Y^2	$(0.00764)^2$	$(0.00589)^2$	---	---	---
Perte (\$)	7.18	4.55	1.95	2.63	0.68

Donc, le changement des tolérances des composants X_1 et X_4 implique une économie de 0.68 \$.

4.9 Conclusion

L'approche statistique a pour principal avantage de tenir en compte toute la distribution alors que la méthode du pire cas ne tient compte que des valeurs extrêmes. En effet, la méthode statistique tient compte du fait qu'il est très peu probable que tous les composants se situent à l'une ou l'autre de leurs valeurs extrêmes. On peut aussi tenir compte l'indice de capabilité du procédé de fabrication des pièces. Un autre avantage est la possibilité de pouvoir identifier les composants qui peuvent être critiques dans un assemblage. De plus, on peut effectuer une analyse de sensibilité, ce qui est avantageux. Cependant, la fiabilité des résultats dépend beaucoup de l'exactitude du modèle et de son approximation par le développement de Taylor.

L'utilisation des simulations vient nous rendre la tâche plus facile tout en nous permettant de pouvoir tenir compte de la distribution associée aux variables X_i et ce sans calcul additionnel.

CHAPITRE 5

AUTRES MÉTHODES D'ANALYSE DES TOLÉRANCES

Ce chapitre présente des modifications proposées par plusieurs auteurs à l'approche de conception robuste de Taguchi. Nous aborderons de nouvelles méthodes d'analyse des tolérances autres que l'approche du pire cas et l'approche statistique.

5.1 Méthode intégrée de design des paramètres et des tolérances

5.1.1 Introduction

La philosophie d'optimisation proposée par Taguchi consiste à réduire la variabilité de la variable Y en déterminant les valeurs optimales des variables X_i sans se soucier de leur tolérance : c'est la phase de design des paramètres. Ensuite, lors de la phase de design des tolérances, on ajuste les tolérances des variables d'entrées. Cette méthodologie correspond à une optimisation en deux phases : optimisation des valeurs nominales et ensuite détermination des tolérances autour des valeurs nominales.

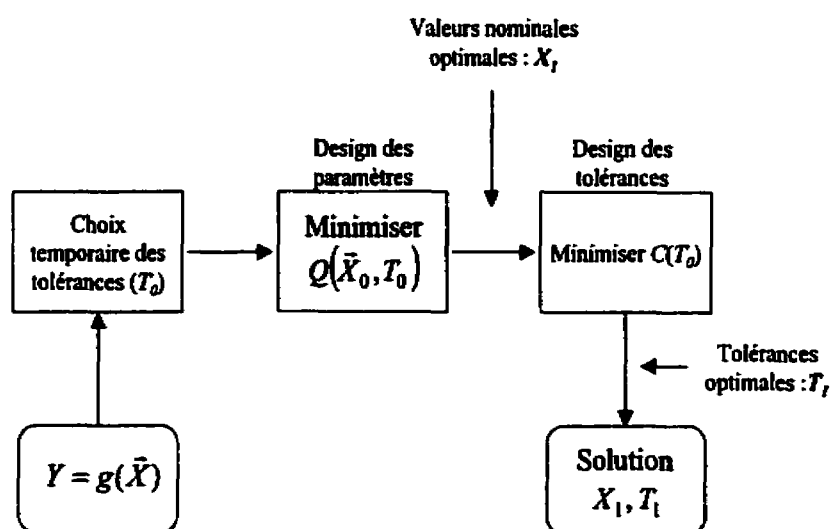


Figure 5.1 : Phases du procédé d'optimisation de Taguchi

5.1.2 Méthode de Li et Wu

Une optimisation simultanée sur les valeurs nominales et les tolérances a été proposée par Li et Wu (1999). Le principe de cette démarche repose sur l'idée de définir la fonction des coûts totaux à l'aide des valeurs nominales et des tolérances pour ensuite en faire l'optimisation.

Au chapitre 2 nous avons vu que la fonction de perte quadratique sert à quantifier les coûts associés à un manque de qualité. L'avantage de cette fonction repose sur le fait qu'il est possible de décomposer la perte moyenne en deux termes : la variance et la déviation de la moyenne de la variable de réponse y par rapport à la nominale visée y_0 .

$$Q = E[k(y - y_0)^2] = k[\mu_y - y_0]^2 + \sigma_y^2 \quad (5.1)$$

On suppose que chaque x_i provient d'une distribution normale de moyenne égale à une valeur nominale (x_i^0) et de variance σ_i^2 . Il est courant de définir la tolérance T_i comme étant égale à trois fois l'écart-type ($T_i = 3\sigma_i$). Il existe d'autres façons de définir les tolérances (Evans, 1974), mais la définition $T_i = 3\sigma_i$ est la plus courante. L'hypothèse de normalité sur les composantes du système permet de récrire la fonction de perte moyenne Q en fonction de x_i^0 et σ_i^2 , ou l'équivalent T_i : $Q(\vec{x}_0, \vec{T})$ où $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ et $\vec{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$.

Si on ajoute les coûts associés aux tolérances des variables d'entrées X_i on obtient une fonction globale F à optimiser :

$$\begin{aligned} F(\bar{x}_0, \bar{T}) &= Q(\bar{x}_0, \bar{T}) + C(\bar{T}) \\ F(\bar{x}_0, \bar{T}) &= k\sigma_y^2 + k(\mu_y - y_0)^2 + \sum_{i=1}^n C_i(T_i) \end{aligned} \quad (5.2)$$

où $C_i(T_i)$ est le coût associé à T_i .

L'approche intégrée consiste donc à minimiser l'équation ci-dessus tout en tenant compte des valeurs nominales et des tolérances. Bien que très logique du point de vue conceptuel et théorique, cette nouvelle approche n'est pas facile à implanter et demande une certaine prudence au niveau du développement. La principale difficulté repose sur l'estimation efficace de la fonction de perte moyenne Q . Les auteurs suggèrent trois méthodes pour l'estimation des composantes de la fonction des coûts totaux.

5.1.2.1 Développement en série de Taylor

Une méthode simple consiste à linéariser la fonction qui relie la variable de sortie aux variables d'entrées en utilisant une série de Taylor. Cette méthode a déjà été abordée lors de l'application des méthodes d'analyse des tolérances dans le cas où la fonction est non linéaire. Dans le cas présent, l'idée est d'estimer les termes de l'équation des coûts totaux en passant par le calcul de dérivées partielles. L'expression 5.3 présente le premier terme d'une série de Taylor :

$$\begin{aligned} y &= g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\approx g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^n d_i(x_i - x_i^0) \end{aligned} \quad (5.3)$$

où

$$d_i = \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x_i = x_i^0}$$

L'estimation de la variance de l'assemblage (σ_y^2) passe par le terme de premier ordre de la série de Taylor :

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^n d_i^2 \sigma_i^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^n d_i^2 T_i^2 \quad (5.4)$$

L'estimation du deuxième terme de la fonction des coûts totaux $(\mu_y - y_0)^2$ repose sur l'estimation de la moyenne de l'assemblage. Cette estimation se fait à l'aide d'une série de Taylor du deuxième ordre :

$$\begin{aligned} y \approx & g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^n d_i (x_i - x_i^0) + \sum_{i=1}^n d_{ii} (x_i - x_i^0)^2 \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n d_{ij} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \end{aligned} \quad (5.5)$$

où

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \right|_{x_i = x_i^0} \\ d_{ij} &= \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\substack{x_i = x_i^0 \\ x_j = x_j^0}} \end{aligned}$$

En prenant l'espérance de l'équation (5.5) on obtient

$$E(Y) = \mu_y \approx g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^n d_{ii} E((x_i - x_i^0)^2) \quad (5.6)$$

en supposant l'indépendance entre les variables d'entrées. Alors

$$\begin{aligned} \mu_y - y_0 &\approx g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - y_0 + \sum_{i=1}^n d_{ii} \sigma_i^2 \\ &= g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - y_0 + \frac{1}{9} \sum_{i=1}^n d_{ii} T_i^2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

En plaçant ces approximations dans l'équation (5.2), on obtient :

$$F(\vec{x}_0, \vec{T}) \approx \frac{k}{9} \sum_{i=1}^n d_i^2 T_i^2 + k \left(\frac{1}{9} \sum_{i=1}^n d_{ii} T_i^2 + g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) - y_0 \right)^2 + \sum_{i=1}^n C_i(T_i) \quad (5.8)$$

L'étape suivante consiste à optimiser cette fonction en trouvant le minimum de celle-ci. Cependant, la résolution de cette équation est fortement liée aux ressources nécessaires pour évaluer les dérivées partielles. Si la fonction g est de forme déterminée, alors d_i et d_{ii} peuvent être obtenues à l'aide d'un programme mathématique adapté à ce type de problème. Dans le cas où la fonction n'est pas de forme analytique déterminée, alors la méthode d'implantation utilisant le développement en séries de Taylor n'est pas envisageable. La seule méthode consiste à utiliser des simulations de Monte Carlo.

5.1.2.2 Simulation de Monte Carlo

Cette méthode permet d'estimer la fonction de perte moyenne de l'équation des coûts totaux à l'aide d'une série de simulations. L'approximation de cette dernière peut être faite à l'aide de la somme finie suivante :

$$Q_N(\bar{x}_0, \bar{T}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (g(\bar{x}_0^{(i)}) - y_0)^2 \quad (5.9)$$

où $\bar{x}_0^{(j)}$ est le $j^{\text{ème}}$ échantillon simulé de la distribution $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et N le nombre de simulations. Lorsque l'approximation de Q par Q_N est faite, des programmes mathématiques d'optimisation adaptés permettent d'optimiser la fonction des coûts totaux.

Cette méthode a l'avantage d'être applicable dans le cas où la fonction n'est pas de forme déterminée. Il est aussi possible de réduire le nombre de simulations en utilisant des arrangements orthogonaux hyper graeco-latin.

5.1.2.3 Tableaux orthogonaux basés sur la méthode de Monte Carlo

Les avantages des arrangements orthogonaux ont déjà été mentionnés dans le chapitre 2 lors de la description de la stratégie de Taguchi. Dans le cas présent, ces arrangements servent à réduire le nombre de simulation.

La première étape de cette méthode consiste à choisir des points représentatifs qui serviront à simuler une variable x_i dont la distribution suit une loi normale de moyenne x_i^0 et de variance σ_i^2 ($N(x_i^0, \sigma_i^2)$). C'est à partir de ces k points représentatifs que les simulations de Monte Carlo seront faites pour les k^n combinaisons possibles des n facteurs et que la fonction de perte Q sera approximée.

Lorsque le nombre de niveau de chaque variable est fixé à trois, il est fréquent d'utiliser les points représentatifs suivants (Taguchi, 1986) :

$$x_i^0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_i, \quad x_i^0, \quad x_i^0 + \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_i$$

où $\sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_i$ correspond à une certaine déviation de la moyenne (x_i^0) . Si on suppose que la variable x_i ne peut prendre que les valeurs $x_i^0 - \Delta_i$, x_i^0 et $x_i^0 + \Delta_i$, ou Δ_i correspond à une déviation exprimée en écart-type, alors la variance de cette distribution à trois valeurs est :

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum \left[\left((x_i^0 - \Delta_i) - x_i^0 \right)^2 + \left(x_i^0 - x_i^0 \right)^2 + \left((x_i^0 + \Delta_i) - x_i^0 \right)^2 \right]}{3} \quad (5.10)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{2(\Delta_i)^2}{3}$$

d'où

$$\Delta_i = \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_i \quad (5.11)$$

Dans ce cas, le nombre de simulations est égal à 3^n ou n est le nombre de variables.

Dans le cas d'une fonction à deux variables, la fonction de perte sera approchée par :

$$Q_2(\bar{x}_0, \bar{T}) = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^N (g(\bar{x}_0^{(i)}) - y_0)^2 \quad (5.12)$$

où $x_0^{(j)}$ correspond aux neuf combinaisons de $\left(x_1^0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_1, x_1^0, x_1^0 + \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_1\right)$ et $\left(x_2^0 - \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_2, x_2^0, x_2^0 + \sqrt{\frac{3}{2}}\sigma_2\right)$.

Puisque le nombre de simulations augmente assez rapidement à mesure que le nombre de variables augmente, l'utilisation des tableaux orthogonaux s'avère être un outil pratique et constitue la deuxième étape de la démarche. L'utilisation des tableaux orthogonaux conduit à une réduction du nombre d'itérations pour l'optimisation de la fonction des coûts totaux.

5.1.3 Conclusion sur la méthode

Finalement, le besoin de combiner les phases de design des paramètres et design des tolérances avait déjà été proposé par Bisgaard et Ankenman (1995), mais sans qu'une méthodologie d'application simultanée des deux phases ne soit développée. Ceux-ci ont plutôt proposé une approche itérative mettant l'accent sur la phase de design des paramètres. Une méthodologie itérative a aussi été suggérée par Chan et Xiao (1995). La méthode intégrée de Li et Wu en est une d'optimisation simultanée sur les valeurs nominale et les tolérances. Cependant, l'application de la méthode peut s'avérer complexe à cause de l'estimation de la fonction de perte moyenne qui doit être faite et qui peut être difficile.

5.2 Méthode combinée de Wayne Taylor

5.2.1 Introduction

L'utilisation de la méthode d'analyse du pire cas ou encore la méthode statistique supposent que toutes les variables soient étudiées sous les mêmes conditions. Or, il arrive que le comportement de certaines variables plus critiques soit mieux décrit par la

méthode du pire cas, alors que pour d'autres l'approche statistique est plus appropriée. Malheureusement, l'utilisation des méthodes analytiques présentées dans les chapitres 3 et 4 ne permet pas de décrire les variables d'un même système sous différentes conditions. De plus, l'hypothèse voulant que le procédé soit centré sur sa valeur nominale sur une longue période de temps n'est pas toujours vérifiable. Une déviation de la moyenne du procédé peut avoir un effet néfaste sur un assemblage en termes de coûts de non-qualité.

Wayne Taylor (1997) a proposé une nouvelle méthode d'analyse des tolérances qui se veut être une combinaison de la méthode d'analyse du pire cas et de la méthode statistique. Comme pour toutes les méthodes d'analyse des tolérances, l'objectif premier est de prédire le comportement de l'assemblage à partir des informations provenant du comportement des composants qui le forment. Le processus d'analyse des tolérances de Taylor a l'avantage de pouvoir décrire de façon plus précise le comportement des composants et ainsi prévoir le comportement de l'assemblage avec plus d'exactitude. De plus, il est possible de faire abstraction de l'hypothèse voulant que le processus de fabrication des composants soit centré sur la valeur nominale.

5.2.2 Description de la méthode

Cette nouvelle approche repose sur une valeur nominale, à laquelle est associée une tolérance, et sur un écart-type dit maximum. Le modèle est décrit par l'inégalité suivante :

$$\tau_{x_i} \pm T_{x_i} \leq \sigma_{x_i} \quad (5.13)$$

Le terme de gauche correspond à ce qui est utilisé lors de l'analyse des tolérances par la méthode du pire cas. À ce dernier terme est associé une déviation maximale que Taylor

associe à l'écart type de la méthode d'analyse statistique. Graphiquement, le modèle de Taylor peut être représenté de la façon suivante :

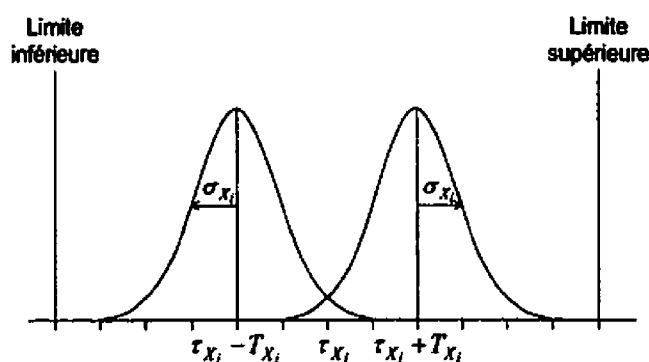


Figure 5.2 : Distribution d'un procédé non centré sur sa valeur nominale

Dans un tel contexte, les exigences sont davantage reliées au procédé de fabrication qu'à la pièce proprement dite. Pour cette raison, l'approche de Taylor se rapproche davantage de l'analyse statistique, mais avec la différence que cette dernière méthode n'exige pas que le procédé soit centré sur la valeur nominale comme c'est souvent le cas lorsque l'on applique la méthode statistique en supposant $T_{X_i} = 3\sigma_{X_i}$. Comme pour les variables d'entrée (X_i) d'un procédé, le modèle de Taylor est applicable à une variable de sortie Y . A partir des résultats des variables d'entrées, il est possible de calculer la valeur nominale, la tolérance ainsi que l'écart type maximal de Y .

$$\tau_Y \pm T_Y \leq \sigma_Y \quad (5.14)$$

Étant un mélange des deux approches présentées dans les chapitres 3 et 4, les calculs des différents termes de l'équation (5.14) sont sensiblement les mêmes que ceux déjà vus.

Les formules pour la valeur nominale et la tolérance de Y sont les mêmes que celles utilisées dans un cas d'analyse par la méthode du pire cas :

$$\tau_Y = \sum_{i=1}^n \tau_{X_i} \quad (5.15)$$

$$T_Y = \sum_{i=1}^n T_{X_i} \quad (5.16)$$

Pour ce qui est du calcul de l'écart type maximal associé à Y (σ_Y), ce dernier est fonction de la variabilité de chacun de ses composants ($\sigma_{X_i}^2$) tel qu'énoncé dans la chapitre 4 lors de la description de la méthode d'analyse statistique.

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \dots + \sigma_{X_n}^2} \quad (5.17)$$

5.2.3 Flexibilité de l'approche de Taylor

La méthode de Taylor permet donc de combiner la méthode du pire cas et la méthode statistique afin de mieux décrire le comportement de chacun des composants. En effet, en utilisant la méthode du pire cas, c'est comme si chaque composant ne pouvait prendre qu'une seule valeur ($\tau_{X_i} - T_{X_i}$ ou $\tau_{X_i} + T_{X_i}$) et que l'écart type qui lui était associé était de zéro. Par contre, si la méthode statistique était utilisée, alors nous aurions une valeur nominale à laquelle serait associé un écart type ($\tau_{X_i} \geq \sigma_{X_i}$). Donc, la méthode de Taylor permet de pouvoir supposer que la valeur nominale peut varier ($\tau_{X_i} - T_{X_i}$ ou $\tau_{X_i} + T_{X_i}$) et qu'il y a une certaine variabilité autour de ces valeurs.

5.2.4 Exemple d'application de la méthode

Un assemblage est formé de quatre composants qui doivent être empilés les uns sur les autres. La valeur nominale et la tolérance des quatre composants sont de 1cm et 0.01cm (1.00 ± 0.01) et les contraintes d'assemblage de 3.93 et 4.07cm. Le fabricant affirme que les quatre composants ont une déviation maximale qui ne devrait pas dépasser 0.005cm. Le modèle de Taylor pour chacun des composants est le suivant :

$$\begin{aligned} X_1 : 1.0 \pm 0.01 &\leq 0.005 \\ X_2 : 1.0 \pm 0.01 &\leq 0.005 \\ X_3 : 1.0 \pm 0.01 &\leq 0.005 \\ X_4 : 1.0 \pm 0.01 &\leq 0.005 \end{aligned} \quad (5.18)$$

À partir de ces informations, il est maintenant possible de déterminer la valeur nominale, la tolérance ainsi que l'écart-type pour l'assemblage.

$$\tau_Y = \sum_{i=1}^4 \tau_{X_i} = 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0 = 4.0$$

$$T_Y = \sum_{i=1}^4 T_{X_i} = 0.01 + 0.01 + 0.01 + 0.01 = 0.04 \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_Y &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 \sigma_{X_i}^2} = \sqrt{(0.005)^2 + (0.005)^2 + (0.005)^2 + (0.005)^2} \\ &= \sqrt{0.0001} = 0.01 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4.0 \pm 0.04 \leq 0.01 \quad (5.20)$$

La figure 5.3 présente le modèle de Taylor pour l'assemblage d'un point de vue graphique.

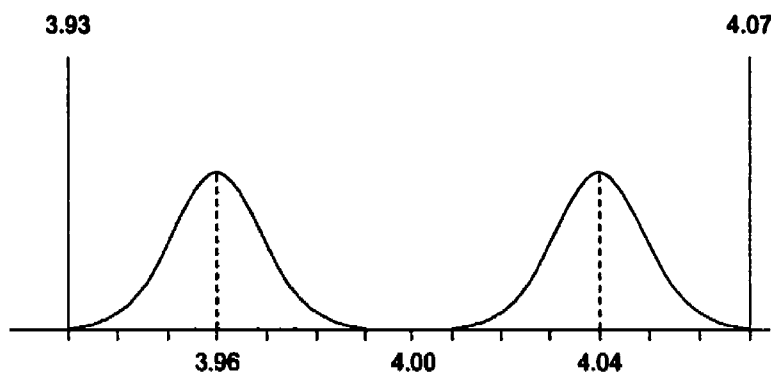


Figure 5.3 : Exemple d'application de la méthode de Taylor

La figure 5.3 indique que l'assemblage satisfait aux exigences de fabrication de 3.93 et 4.07cm. Il est possible de conclure qu'aucune modification n'est nécessaire pour que l'assemblage soit faisable. La méthode de Taylor a l'avantage de nous permettre de conclure que l'assemblage est toujours possible même si la valeur nominale se retrouve dans un des deux cas extrêmes.

5.3 Modèle unifié d'analyse des tolérances de Greenwood et Chase

5.3.1 Introduction

Comme Taylor, Greenwood et Chase (1987) proposent une méthode d'analyse des tolérances appelée la méthode unifiée et qui est aussi un mélange des deux approches déjà décrites. Cette méthode permet de supposer que les procédés de fabrication des composants d'un système ne soient pas centrés sur leurs valeurs nominales. La méthode unifiée se retrouve sous différentes appellations dans la littérature : modèle d'estimation de la déviation de la moyenne ou encore modèle incertain de la moyenne. Cette méthode a pour caractéristique de permettre l'inclusion d'une déviation de la moyenne dans le modèle servant à l'analyse des tolérances.

5.3.2 Modèle associé à la méthode

L'étude des tolérances de l'assemblage repose sur deux aspects : la déviation de la moyenne et la variabilité de la moyenne. Pour ce faire, un facteur de déviation f_i , se situant entre 0 et 1, est sélectionné pour chacun des composants formant l'assemblage. La tolérance associée à l'assemblage est représentée par l'équation suivante :

$$T_Y = \frac{f_1 T_{X_1} + f_2 T_{X_2} + \dots + f_n T_{X_n}}{\sqrt{(1-f_1)^2 T_{X_1}^2 + (1-f_2)^2 T_{X_2}^2 + \dots + (1-f_n)^2 T_{X_n}^2}} \quad (5.21)$$

où $0 \leq f_i \leq 1$ est le facteur de déviation associé à la moyenne de la variable X_i . La première partie de l'équation $(\sum_{i=1}^n f_i T_{X_i})$ est une estimation de la déviation de la moyenne. Cette première sommation est traitée comme le modèle de l'analyse du pire cas où les déviations sont combinées pour donner la plus grande déviation possible pour l'assemblage. La seconde partie de l'équation représente la variabilité des composants telle que décrite dans un cas statistique. La variance de chacun des composants y est réduite par un facteur de $(1-f_i)$. Dans le cas présent, on fait l'hypothèse que plus la déviation d'un composant est grande, par rapport à sa moyenne, plus la variabilité du procédé sera petite. De plus, on suppose que la variabilité sera égale à plus ou moins trois écarts types entre la moyenne et la limite de tolérance la plus près (voir figure 5.4).

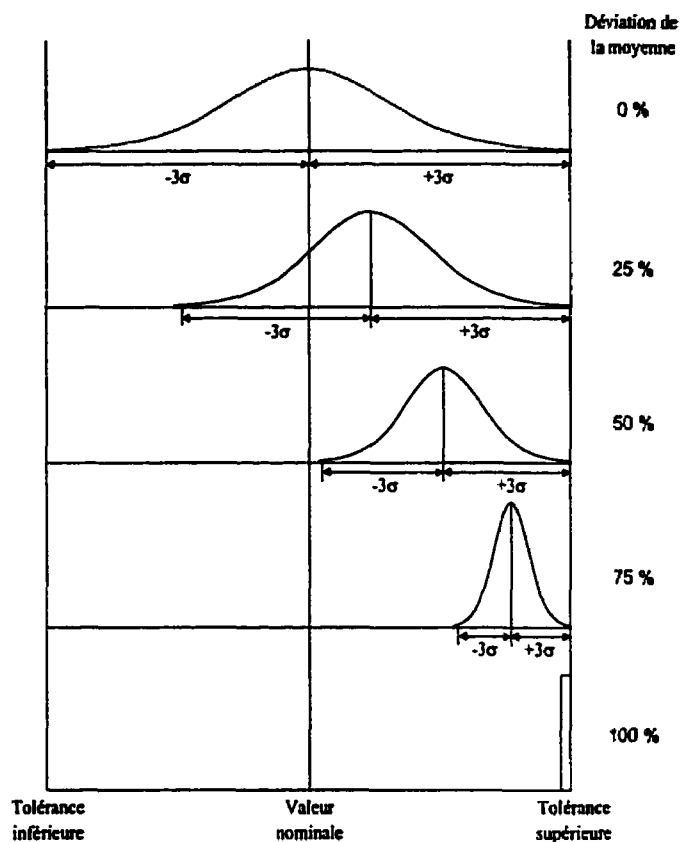


Figure 5.4 : Variabilité d'un procédé en fonction de la déviation

5.3.3 Parallèle avec la méthode du pire cas et la méthode statistique

Pour faire le parallèle qui existe entre ce que Greenwood et Chase proposent et les méthodes présentées dans les chapitres 3 et 4, il suffit de fixer la valeur des facteurs de déviation à 0 ou 1.0. Une valeur de 0 pour tous les f_i donne le modèle suivant :

$$T_Y = \sqrt{(1-0)^2 T_{X_1}^2 + (1-0)^2 T_{X_2}^2 + \dots + (1-0)^2 T_{X_n}^2} \quad (5.22)$$

qui correspond au modèle d'une analyse statistique. À l'opposé, en fixant toutes les valeurs des f_i à 1.0, le modèle (5.21) qui en résulte est le même que celui pour l'analyse dite du pire cas. Donc, comme pour l'approche de Taylor, la méthode unifiée d'analyse

des tolérances permet de mieux décrire le comportement des variables d'entrées. Ainsi il est possible d'avoir une meilleure idée du comportement de l'assemblage final.

5.4 Conclusion

Depuis plusieurs années, les méthodes utilisées pour l'analyse des tolérances se limitaient à l'approche de Taguchi et l'utilisation de la méthode du pire cas et la méthode statistique. Le besoin de nouvelles approches se faisant sentir, certains auteurs se sont penchés sur la question et ont élaboré de nouvelles approches. Ce chapitre résume quelques-unes de ces nouvelles possibilités d'analyses empirique et analytique. Ces nouvelles méthodes ont pour principal avantage d'intégrer les méthodes classiques dans une perspective plus globale d'analyse du problème des tolérances. Comme dans le cas des autres méthodes, la difficulté principale de toutes ces méthodes réside dans leur utilisation par les équipes de conception de système.

CONCLUSION

Nous avons vu que la méthodologie de conception et d'analyse des tolérances est un élément important dans les processus de conception et de fabrication des produits. L'analyse des tolérances doit devenir une partie intégrante du procédé de fabrication et doit être pris en considération dès la conception. Il n'est plus seulement question de bien communiquer les tolérances, mais d'analyser les tolérances pour atteindre un niveau de qualité supérieur. De plus, les exigences de tolérances doivent tenir en compte l'équilibre entre les coûts technologiques et la qualité du produit. C'est seulement à la suite d'une analyse rationnelle de l'impact des tolérances que l'on est le mieux placé pour répondre à cette question.

Le système de l'ingénierie de la qualité proposé par Taguchi montre bien la place et l'impact que peuvent avoir les tolérances durant la conception d'un produit ou d'un procédé. Divisée en trois phases, cette philosophie de la qualité vise à concevoir des produits et des procédés qui seront robustes aux différentes sources de variations incontrôlables. Les outils statistiques sur lesquels repose l'approche de Taguchi ne sont pas très complexes. Le défi de l'approche de Taguchi ne réside pas dans la compréhension de celle-ci mais au niveau de son implantation dans les entreprises.

L'analyse des tolérances par la méthode du pire cas est une approche simple et intuitive. Cependant, cette méthode devient rapidement inutilisable à mesure que le niveau de complexité croissant des assemblages. L'aspect très conservateur associé à la méthode du pire cas peut être un avantage comme un désavantage. Dans le cas d'une caractéristique qualité extrêmement critique, la méthode du pire cas peut s'avérer être une méthode d'analyse acceptable si on ne peut pas tolérer de risque. Cependant, l'utilisation de cette méthode pour des caractéristiques de la qualité moins critiques aura pour conséquence d'augmenter inutilement les coûts de production.

L'analyse par la méthode statistique a pour avantage de prendre en considération toute la distribution de la variable de réponse et non pas seulement les cas extrêmes comme avec la méthode du pire cas. Il est aussi possible de pouvoir tenir compte de la capacité d'un système à fournir des composants de qualité. Un autre avantage à utiliser la méthode statistique est l'identification des composants critiques ayant un impact plus important sur la variabilité de l'assemblage. Cependant, il n'y a pas que des avantages reliés à la cette méthode. La fiabilité des résultats repose sur la précision du modèle servant à décrire la relation entre la caractéristique qualité et les composants qui forment l'assemblage ainsi que de l'exactitude des calculs. Un autre désavantage est l'utilisation de certaines hypothèses qui doivent être faites afin de pouvoir faciliter certains des calculs.

La contrainte à faire certaines hypothèses dans la méthode statistique peut être considérablement allégée par l'utilisation de la méthode de simulation de Monte Carlo. L'utilisation de cette méthode permet de pouvoir tenir compte de la distribution associée aux variables X_i et cela sans calcul additionnel. L'efficacité de cette méthode repose essentiellement sur la performance du logiciel qui servira à réaliser les simulations.

Les exemples d'assemblage, linéaire et non linéaire, présentés dans ce mémoire nous ont permis d'appliquer ces trois méthodes d'analyses. L'application de la méthode du pire cas nous a permis de conclure que des modifications étaient nécessaires pour que les assemblages soient faits sans problème. Les conclusions associées à l'application de la méthode statistique sont différentes de celles énoncées à l'aide de la méthode du pire cas. En effet, la méthode statistique nous a permis de pouvoir conclure qu'aucune modification n'était nécessaire pour que les assemblages répondent à des critères préétablis. L'utilisation des simulations est venue confirmer les résultats obtenus avec la méthode statistique.

Bien que les trois méthodes d'analyse mentionnées plus haut soient applicable dans la très grande majorité des cas d'analyse des tolérances, le besoin de nouvelles approches s'est fait sentir. Durant les dernières années, des auteurs ont suggéré de nouvelles méthodes d'analyse combinant la méthode du pire cas à la méthode statistique. En plus des méthodes analytiques associées à l'analyse des tolérances, tout l'aspect empirique de l'approche de Taguchi a été revue par certains auteurs qui en proposent une amélioration. Même si ces nouvelles méthodes nous permettent de mieux caractériser les produits (procédés) que nous souhaitons étudier, leur utilisation de ces dernières n'implique pas que l'implantation y est plus simple.

L'objectif de ce mémoire était de démontrer le rôle et l'impact des tolérances et de synthétiser les méthodes permettant d'en faire l'analyse. Nous présentons un tableau synthèse de l'analyse des tolérances qui résume ce mémoire et qui pourra servir de guide à quiconque doit entreprendre une telle étude.

Tableau synthèse des méthodes d'analyse des tolérances

Méthode d'analyse	Avantage	Inconvénient
Pire cas	<ul style="list-style-type: none"> • Déterministe • Intuitive • Adéquate pour des caractéristiques très critiques 	<ul style="list-style-type: none"> • Surtout utilisée pour des caractéristiques dimensionnelles • Peut faire augmenter inutilement les coûts de fabrication
Statistique	<ul style="list-style-type: none"> • Réaliste • Identification des composants critiques • Capabilité des procédés prise en considération 	<ul style="list-style-type: none"> • Hypothèse de normalité
Simulation de Monte Carlo	<ul style="list-style-type: none"> • Générale • Rapide • Flexibilité des hypothèses sur les composants • Distribution de Y 	<ul style="list-style-type: none"> • Fonction de la performance du logiciel • Plus complexe lorsque la fonction n'est pas définie
Taylor	<ul style="list-style-type: none"> • Réaliste • Meilleure caractérisation des composants de l'assemblage 	<ul style="list-style-type: none"> • Hypothèse de normalité
Greenwood et Chase	<ul style="list-style-type: none"> • Réaliste • Meilleure caractérisation des composant de l'assemblage 	<ul style="list-style-type: none"> • Hypothèse de normalité

BIBLIOGRAPHIE

- BAJARIA, H.J. (1996), *TQM in Action Conference*, Sheffield, July 8-10, United Kingdom.
- BISGAARD, S. and ANKENMAN, B. (1995), "Analytic Parameter Design", *Quality Engineering* 8(1), pp. 75-96.
- BLANCHARD, B.S.(1998), *System Engineering Management*, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York.
- BOX, G.E.P., BISGAARD, S., FUNG, C. (1988), "An Explanation and Critique of Taguchi's Contributions to Quality Engineering", *Quality and Reliability Engineering International*, vol. 4, april-june, pp 123-133.
- BOX, G.E.P. (1988), "Signal to Noise Ratios, Performance Criteria and Transformation", *Technometrics* 30, pp. 1-40.
- CHAN, L.K. and XIAO, P.H. (1995), "Combined Robust Design", *Quality Engineering* 8(1), pp. 47-56.
- CHUN, Z. and HSU-PIN, W. (1998), "Robust Design of Assembly and Machining Tolerance Allocations", *IIIE Transaction*, vol. 30, pp. 17-29.
- CLAUSING, Don (1994), *Total Quality Development : Step-by-Step guide to World-Class Concurrent Engineering*, ASME Press, New York.
- CLÉMENT, B. (2000), *Le rôle des concepts et de la méthodologie Taguchi dans la conception d'un produit*, article soumis pour publication.

COX, Neil D. (1986), *How to Perform Statistical Analysis*, vol. 11, Basic References in Quality Control, American Society for Quality Control, Milwaukee, Wisconsin.

CREVELING, C.M. (1997), *Tolerance Design : A Handbook for Developing Optimal Specification*, Addison Wesley Longman, Inc, Massachusetts.

DEHNAD, Khosrow. (1989), *Quality Control, Robust Design, and the Taguchi method*, Wadsworth & Brooks/Cole, Advanced Books & Software, Pacific Grove, Californie.

Dimentionning and Tolerancing ANSI Y14.5 M1982, ASME (R1988), p.14.

EALEY, Lance A. (1988), *Quality by Design : Taguchi Methods and U.S. Industry*, 1th edition, ASI Press, Michigan.

EMCH, G. and PARKINSON, A. (1994), "Robust Design for Worst-Case Tolerances", *Journal of Mechanical Design*, vol. 116, pp. 1019-1025.

EVANS, D.H. (1975), "Statistical Tolerancing : The State of Art : Part I : Background; Part II : Methods for Estimating Moments; Part III : Shifts and Drifts.", *Journal of Quality and Technology*, vol. 6, no. 4, vol. 7, no. 1, vol. 7, no. 2.

FATHI, Yahya. (1990), "Producer-Consumer Tolerances", *Journal of Quality Technology*, 22, pp. 138-145.

FORTINI, E.I. (1967), *Dimensioning for Interchangeable Manufacturing*, Industrial Press, New York.

FOWLKES, William Y. and CREVELING, Clyde M. (1995), *Engineering Methods for Robust Product Design : Using Taguchi Methods in Technology and Product Development*, 1th edition, Addison-Wesley Pub. Co., Massachusetts.

GREENWOOD, W.H. and CHASE, K.W. (1987), "A New Tolerance Analysis Method for Designers and Manufacturers", *Journal of Engineering for Industry*, vol. 109, pp. 112-116.

GREENWOOD, W.H. and CHASE, K.W. (1988), "Worst Case Tolerance Analysis with Nonlinear Problems", *Journal of Engineering for Industry*, vol. 110, pp. 232-235.

GREENWOOD, W.H. and CHASE, K.W. (1990), "Root Sum Squares Tolerance Analysis with Nonlinear Problems", *Journal of Engineering for Industry*, vol. 112, pp. 382-384.

HAMMER, M. and CHAMPY, J. (1993), *Le reengineering*, 1th edition, DUNOD, Paris.

HARRY, Mikel J. and STEWART, R. (1988), *Six Sigma Mechanical Design Tolerancing*, Motorola University Press, Schaumburg, Ill.

LEE, Woo-Jong and WOO, T.C. (1990), "Tolerances :Their Analysis and Synthesis", *Journal of Engineering for Industry*, vol. 112, pp. 113-121.

LI, William, WU and C.F.J. (1999), "An Integrated Method of Parameter Design and Tolerance Design", *Quality Engineering* 11(3), pp. 417-425.

LOGOTHETIS, N. (1992), *Managing for Total Quality : From Deming to Taguchi and SPC*, Prentice Hall, New York.

LOWELL, Foster W. (1994), *Geo-metric III: The Application of Geometric Tolerancing Techniques (using the customary inch system)*, Addison-Wesley, M.A.

PHADKE, Madhav S. (1989), *Quality Engineering Using Robust Design*, 1th edition, Prentice-Hall, New Jersey.

PIGNATIELLO, J. and RAMBERG, J. (1991), "Top Ten Triumphs and Tragedies of Genichi Taguchi", *Quality Engineering* (4), pp. 211-225.

PUGH, S. (1991), *Total Design*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts.

ROSS, Phillip J. (1996), *Taguchi Techniques for Quality Engineering ; Loss Function, Orthogonal Experiments, Paramter and Tolerance Design*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York.

SARGENT, Roy and WAINWRIGHT Eric (1998), *Crystall Ball Version 4.0 User Manual*®, 2nd edition, Decisioneering, Inc., Denver, Colorado.

SHAPIRO, S.S. and GROSS, A.J. (1981), *Statistical Modeling Techniques*, Marcel Dekker, Inc., New York.

SHINA, Sammy G. (1991), *Concurrent Engineering and Design for Manufacture of Electronics Products*, Van Nostrand Reinhold, New York.

SHOEMAKER, A.C., KWOK-LEUNG, T. and WU, C.F.J. (1991), "Economical Experimentation Methods for Robust Design". *Technometrics* 33(4), pp. 415-427.

SPOTTS, M.F. (1983), *Dimensioning and Tolerancing for Quality Production*, 1th edition, Prentice-Hall, New Jersey.

TAGUCHI, Genichi (1986), *Introduction to Quality Engineering : Designing Quality Into Products and Processes*, UNIPUB/Kraus International Publications, White Plains, N.Y.

TAGUCHI, Genichi and CLAUSING Don (1990), "Robust Quality", *Harvard Business Review* (68), jan-feb, pp. 95-103.

TAGUCHI, Genichi, ELSAYED, Elsayed A. and HSIANG, Thomas C. (1989), *Quality Engineering in Production Systems*, McGraw-Hill, New York.

TAGUCHI, Genichi (2000), *Robust Engineering*, McGraw-Hill, New York.

TAGUCHI, Genichi (1987), *System of Experimental Design*, vol. 1, UNIPUB/Kraus International Publications, Michigan.

TAGUCHI, Genichi (1987), *System of Experimental Design*, vol. 2, UNIPUB/Kraus International Publications, Michigan.

TAGUCHI, Genichi (1993), *Taguchi on Robust Technologie Development : Bringing Quality Engineering Upstream*, ASME Press, New York.

TAYLOR, WAYNE A. (1991), *Optimization and Variation Reduction on Quality*, McGraw-Hill, New York.

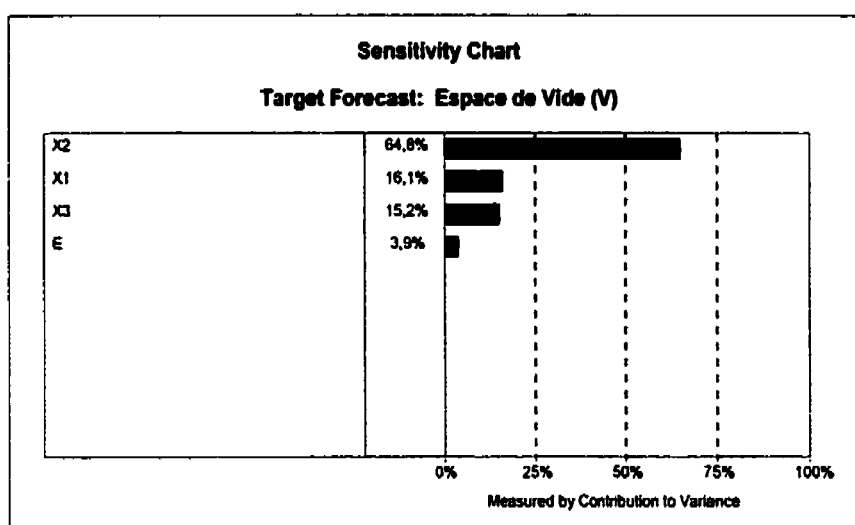
ULLMAN, David G. (1992), *The Mechanical Design Process*, McGraw-Hill, New York.

WHEELER, Donald (1988), *Understanding Industrial Experimentation*, 2nd edition, SPC Press Inc., Knoxville, TE.

ANNEXE A**RÉSULTATS DES SIMULATIONS POUR L'ÉTUDE D'UN CAS LINÉAIRE****Crystal Ball Report**

Simulation started on 00-10-29 at 15:37:16

Simulation stopped on 00-10-29 at 15:39:13



Forecast: Espace de Vide (V)**Cell: B8****Summary:**

Certainty Level is 99,98%

Certainty Range is from 0,002 to 0,008

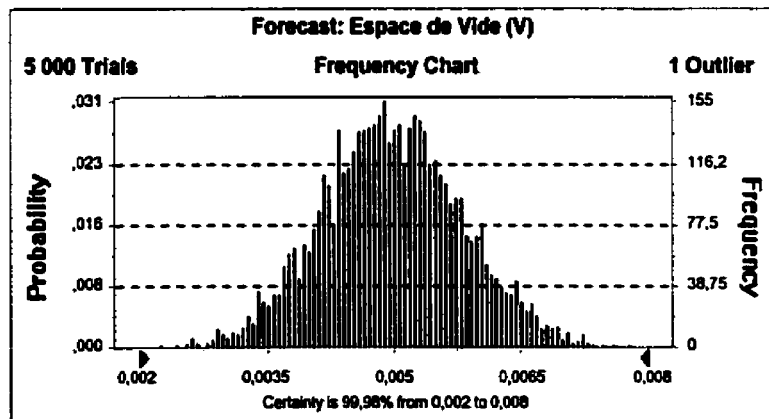
Display Range is from 0,002 to 0,008

Entire Range is from 0,00180732428588826 to 0,00778713191228397

After 5 000 Trials, the Std. Error of the Mean is 0,00001184271862585

Statistics:

	Value
Trials	5000
Mean	0,004991382
Median	0,004980216
Mode	---
Standard Deviation	0,000837407
Variance	7,0125E-07
Skewness	0,021742015
Kurtosis	2,963679131
Coeff. of Variability	0,167770512
Range Minimum	0,001807324
Range Maximum	0,007787132
Range Width	0,005979808
Mean Std. Error	1,18427E-05



Forecast: Espace de Vide (V) (cont'd)

Cell: B8

Percentiles:

<u>Percentile</u>	<u>Value</u>
0%	0,001807324
10%	0,003920761
20%	0,004285358
30%	0,004549768
40%	0,004773108
50%	0,004980216
60%	0,005209199
70%	0,005416626
80%	0,005691903
90%	0,006062557
100%	0,007787132

End of Forecast

Assumptions

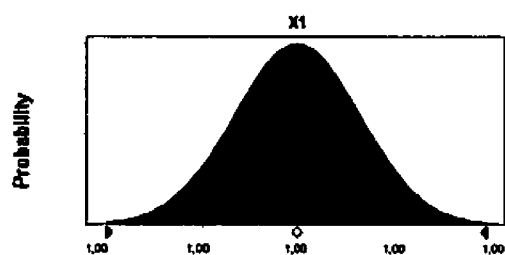
Assumption: X1

Cell: B3

Normal distribution with parameters:

Mean	1,00
Standard Dev.	0,000333

Selected range is from -Infinity to -Infinity
Mean value in simulation was 1,00



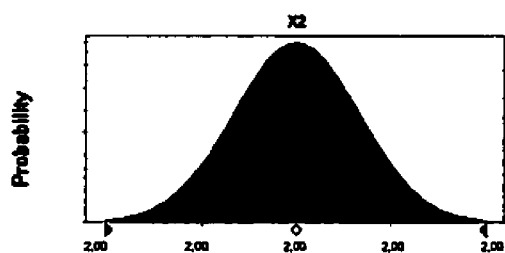
Assumption: X2

Cell: B4

Normal distribution with parameters:

Mean	2,00
Standard Dev.	0,000667

Selected range is from -Infinity to -Infinity
Mean value in simulation was 2,00

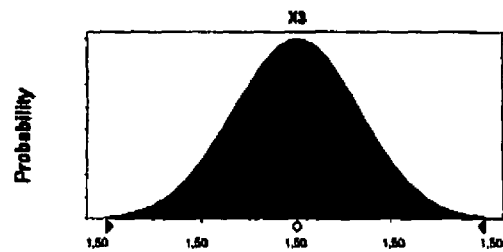


Assumption: X3**Cell: B5**

Normal distribution with parameters:

Mean	1,50
Standard Dev.	0,000333

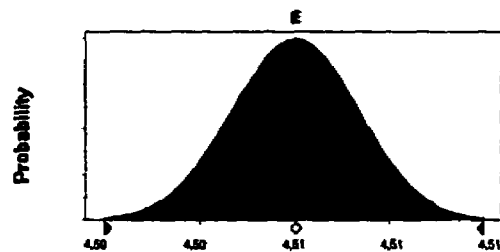
Selected range is from -Infinity to -Infinity
 Mean value in simulation was 1,50

**Assumption: E****Cell: B6**

Normal distribution with parameters:

Mean	4,51
Standard Dev.	0,000167

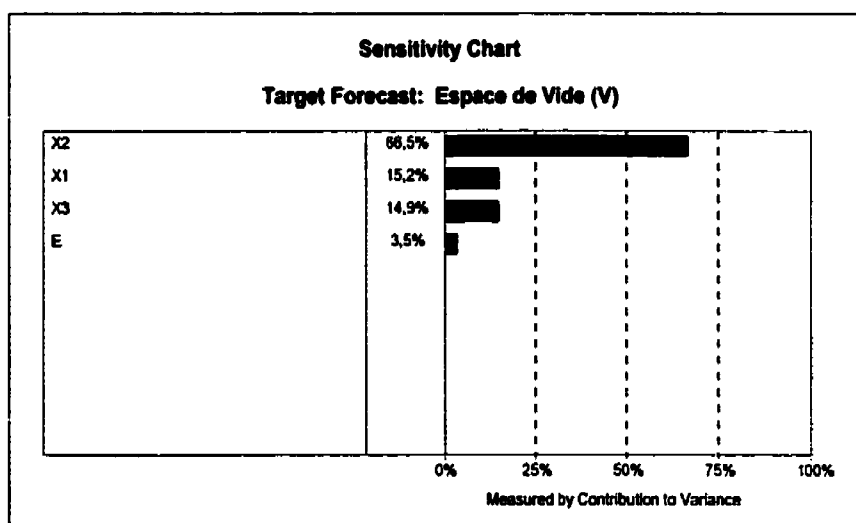
Selected range is from -Infinity to -Infinity
 Mean value in simulation was 4,51

**End of Assumptions**

ANNEXE B**RÉSULTATS DES SIMULATIONS POUR L'ÉTUDE D'UN CAS LINÉAIRE AVEC
UNE LOI UNIFORME****Crystal Ball Report**

Simulation started on 00-11-11 at 12:24:53

Simulation stopped on 00-11-11 at 12:26:48



Forecast: Espace de Vide (V)

Cell: B8

Summary:

Certainty Level is 99%

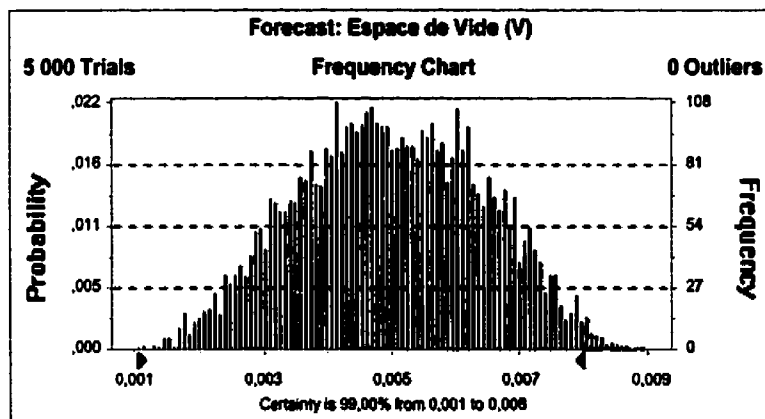
Certainty Range is from 0,001 to 0,008

Display Range is from 0,001 to 0,009

Entire Range is from 0,00100899519329345 to 0,00894117308614839

After 5 000 Trials, the Std. Error of the Mean is 0,00002052282741165

Statistics:	Value
Trials	5000
Mean	0,004999985
Median	0,004983991
Mode	---
Standard Deviation	0,001451183
Variance	2,10593E-06
Skewness	-0,032341595
Kurtosis	2,372775141
Coeff. of Variability	0,290237497
Range Minimum	0,001008995
Range Maximum	0,008941173
Range Width	0,007932178
Mean Std. Error	2,05228E-05



Forecast: Espace de Vide (V) (cont'd)**Cell: B8****Percentiles:**

<u>Percentile</u>	<u>Value</u>
0%	0,001008995
10%	0,003076552
20%	0,003676677
30%	0,004174021
40%	0,004583757
50%	0,004983991
60%	0,005428726
70%	0,005867469
80%	0,006321601
90%	0,00692523
100%	0,008941173

End of Forecast

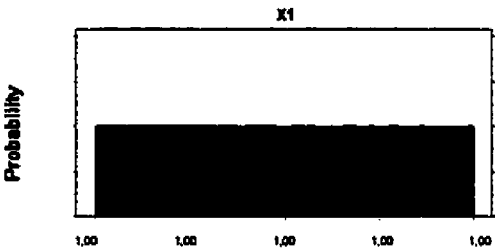
Assumptions

Assumption: X1

Cell: B3

Uniform distribution with parameters:
Minimum 0,999
Maximum 1,001

Mean value in simulation was 1,00

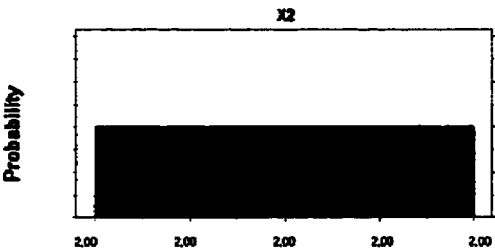


Assumption: X2

Cell: B4

Uniform distribution with parameters:
Minimum 1,998
Maximum 2,002

Mean value in simulation was 2,00

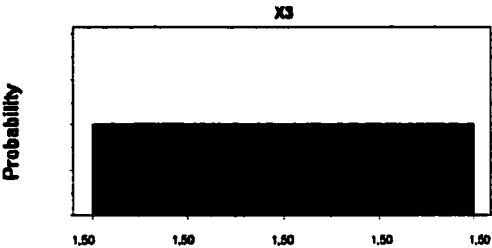


Assumption: X3

Cell: B5

Uniform distribution with parameters:
Minimum 1,499
Maximum 1,501

Mean value in simulation was 1,50

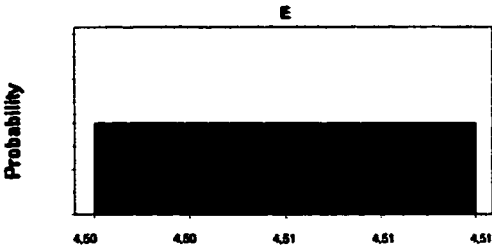


Assumption: E

Cell: B6

Uniform distribution with parameters:
Minimum 4,5045
Maximum 4,5055

Mean value in simulation was 4,51



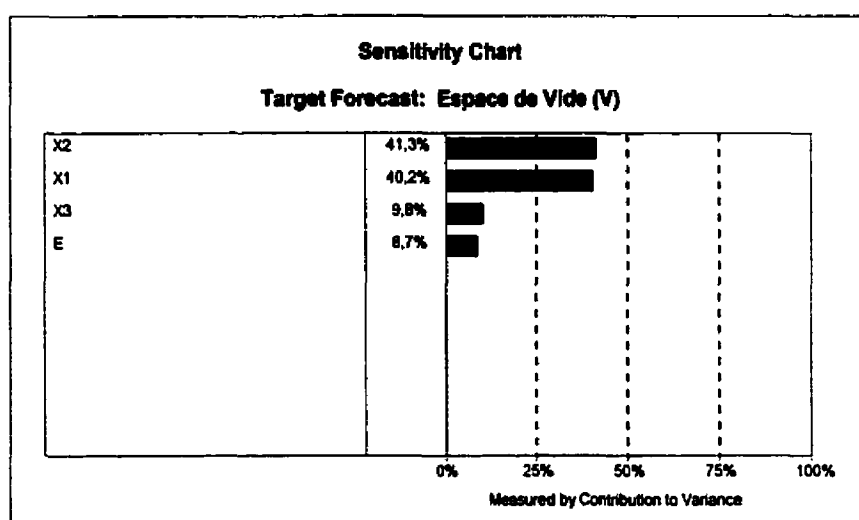
End of Assumptions

ANNEXE C

**RÉSULTATS DES SIMULATIONS POUR L'ÉTUDE D'UN CAS LINÉAIRE AVEC
UNE LOI UNIFORME ET LES NOUVELLES TOLÉRANCES POUR X_2 ET X_3** **Crystal Ball Report**

Simulation started on 00-11-11 at 17:19:47

Simulation stopped on 00-11-11 at 17:21:43



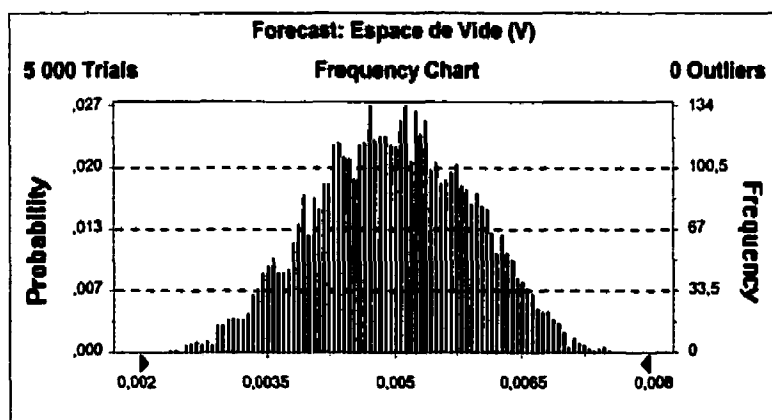
Forecast: Espace de Vide (V)**Cell: B8****Summary:**

Display Range is from 0,002 to 0,008

Entire Range is from 0,00240337162250781 to 0,00752124219412065

After 5 000 Trials, the Std. Error of the Mean is 0,00001295365085833

Statistics:	Value
Trial	5000
Mean	0,005005521
Median	0,005011194
Mode	---
Standard Deviation	0,000915961
Variance	8,38985E-07
Skewness	-0,04182047
Kurtosis	2,514806
Coeff. of Variability	0,182990244
Range Minimum	0,002403372
Range Maximum	0,007521242
Range Width	0,005117871
Mean Std. Error	1,29537E-05



Forecast: Espace de Vide (V) (cont'd)**Cell: B8****Percentiles:**

<u>Percentile</u>	<u>Value</u>
0%	0,002403372
10%	0,00380371
20%	0,004197397
30%	0,004487422
40%	0,004754099
50%	0,005011194
60%	0,005262944
70%	0,005518738
80%	0,005837057
90%	0,006212902
100%	0,007521242

End of Forecast

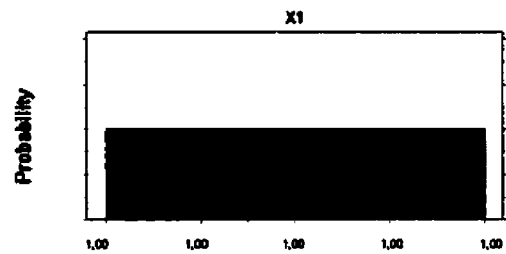
Assumptions

Assumption: X1

Cell: B3

Uniform distribution with parameters:
Minimum 0,999
Maximum 1,001

Mean value in simulation was 1,00

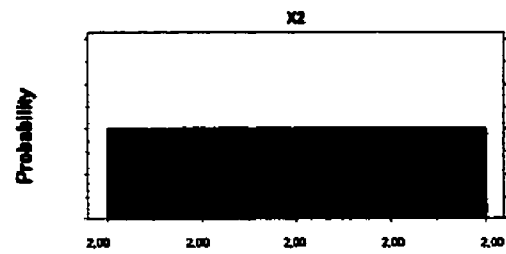


Assumption: X2

Cell: B4

Uniform distribution with parameters:
Minimum 1,999
Maximum 2,001

Mean value in simulation was 2,00

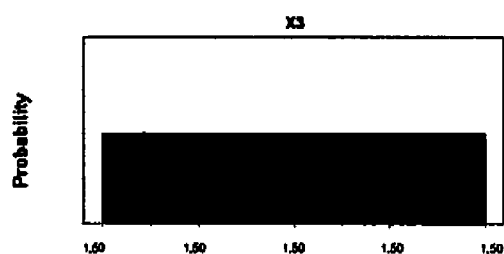


Assumption: X3**Cell: B5**

Uniform distribution with parameters:

Minimum	1,4995
Maximum	1,5005

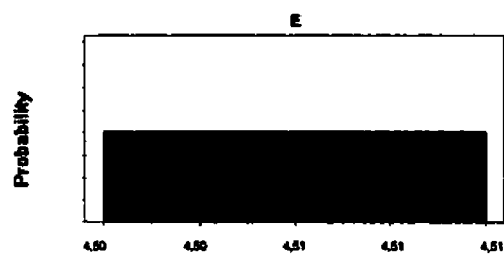
Mean value in simulation was 1,50

**Assumption: E****Cell: B6**

Uniform distribution with parameters:

Minimum	4,5045
Maximum	4,5055

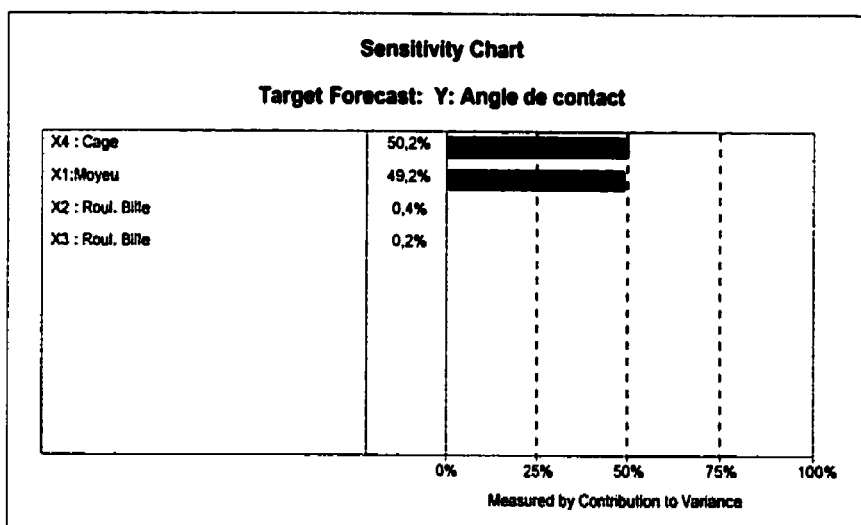
Mean value in simulation was 4,51

**End of Assumptions**

ANNEXE D**RÉSULTATS DES SIMULATIONS POUR L'ÉTUDE D'UN CAS NON LINÉAIRE****Crystal Ball Report**

Simulation started on 00-10-29 at 16:45:01

Simulation stopped on 00-10-29 at 16:48:30



Forecast: Y: Angle de contact

Cell: B8

Summary:

Certainty Level is 99,67%

Certainty Range is from 0,0991385727070976 to 0,145267897144357 radian

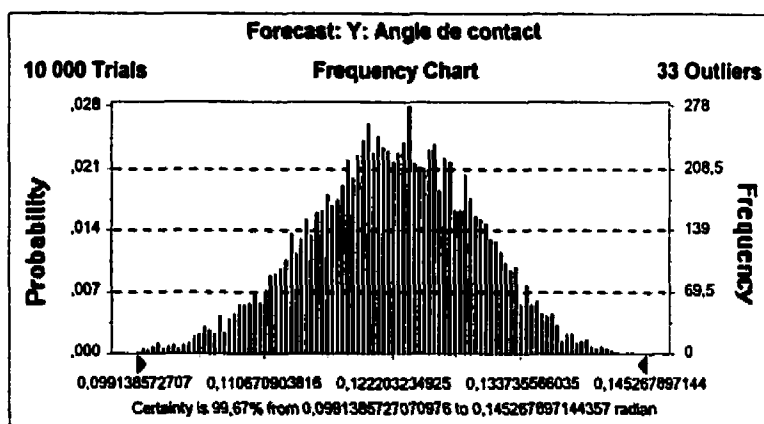
Display Range is from 0,0991385727070976 to 0,145267897144357 radian

Entire Range is from 0,0860940326817696 to 0,147631116752287 radian

After 10 000 Trials, the Std. Error of the Mean is 0,00007688220739543

Statistics:

	Value
Trials	10000
Mean	0,122203235
Median	0,122403379
Mode	---
Standard Deviation	0,007688221
Variance	5,91087E-05
Skewness	-0,19420699
Kurtosis	3,09495053
Coeff. of Variability	0,062913398
Range Minimum	0,086094033
Range Maximum	0,147631117
Range Width	0,061537084
Mean Std. Error	7,68822E-05



Forecast: Y: Angle de contact (cont'd)**Cell: B8****Percentiles:**

<u>Percentile</u>	<u>radian</u>
0%	0,086094033
10%	0,11232248
20%	0,115828071
30%	0,1183755
40%	0,120387556
50%	0,122403379
60%	0,124327356
70%	0,12640765
80%	0,128854441
90%	0,131862593
100%	0,147631117

End of Forecast

Assumptions

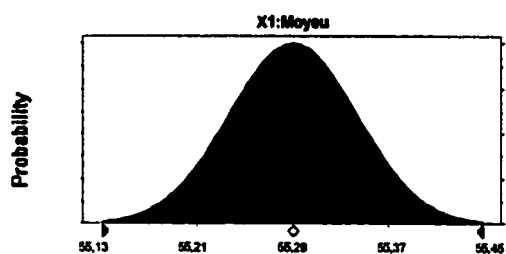
Assumption: X1:Moyeu

Cell: B3

Normal distribution with parameters:

Mean	55,29
Standard Dev.	0,062

Selected range is from -Infinity to -Infinity
Mean value in simulation was 55,29



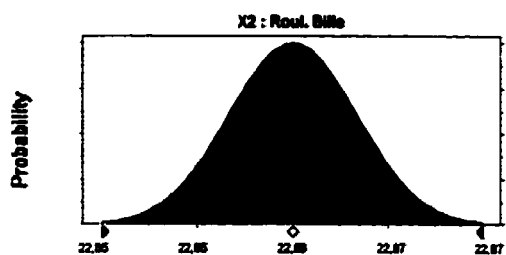
Assumption: X2 : Roul. Bille

Cell: B4

Normal distribution with parameters:

Mean	22,86
Standard Dev.	0,0043

Selected range is from -Infinity to -Infinity
Mean value in simulation was 22,86



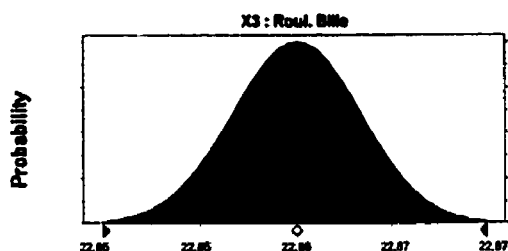
Assumption: X3 : Roul. Bille

Cell: B5

Normal distribution with parameters:

Mean	22,86
Standard Dev.	0,0043

Selected range is from -Infinity to -Infinity
Mean value in simulation was 22,86



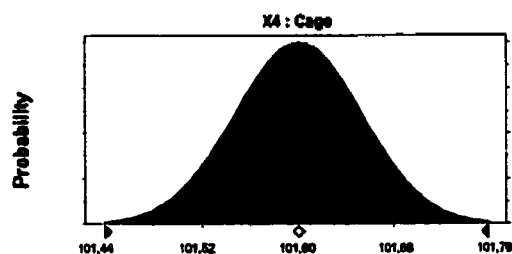
Assumption: X4 : Cage

Cell: B6

Normal distribution with parameters:

Mean	101,60
Standard Dev.	0,052

Selected range is from -Infinity to -Infinity
Mean value in simulation was 101,60



End of Assumptions